Suplemento del
CALCULUS

Michael Spivak

$$2x + y^2 =$$

EDITORIAL REVERTÉ

Suplemento del

CÁLCULO INFINITESIMAL CALCULUS

Suplemento del

CÁLCULO INFINITESIMAL

CALCULUS

Michael Spivak

Universidad de Brandeis

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México - Rio de Janeiro

Título de la obra original:
Supplement to Calculus

Edición original en lengua inglesa publicada por
W. A. Benjamín, Inc., New York

Versión española por
Dr. Bartolomé Frontera Marqués
Doctor Ingeniero de Montes. Doctor en Ciencias Matemáticas
Profesor Adjunto de Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades
en la Universidad de Zaragoza

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A. y
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
e-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

REVERTÉ EDICIONES, S.A. DE C.V.
Río Pánuco 141 Col.Cuauhtémoc
C. P. 06500 México, D. F.
Tel.: 533 56 58 al 60
Fax: 514 67 99
e-mail: reverte@reverte.com.mx
www.reverte.com

Impresión digital a partir de Junio 2005

Edición en español:

ISBN: 84-291-5143-5 España
ISBN: 968-6708-37-5 México

Depósito Legal: SE-3369-2005 E.U.

Prólogo

Este libro contiene las soluciones de todos los problemas de «Calculus», excepto aquellos que ya vienen resueltos al final del mismo texto. Las soluciones fueron redactadas durante un período (muy desagradable) de dos meses y por fuerza ha tenido que haber, aparte de abundantes erratas, algunos errores más sustanciales. Los errores de cálculo deben ser, por lo menos, fáciles de detectar, ya que la mayor parte de los cálculos son desarrollados con detalle. Cuando se trate de demostraciones las dificultades serán mayores, debiéndose ello en particular a que han sido expuestas con una concisión que contrasta algo con el estilo del texto. Esto no ha sido motivado sólo por una economía de espacio, sino que también ha influido la consideración de que los libros de soluciones deben utilizarse sólo como último recurso y de que muchas veces es más fácil encontrar una demostración por uno mismo que captar la escrita por otro. En alguno de los últimos capítulos se descubrieron algunos errores en los problemas originales, demasiado tarde para poder ser corregidos, cuando se estaban escribiendo estas respuestas; confío que las soluciones revelen todos los errores que hubieran podido pasar desapercibidos para el lector.

M. S.

CAPÍTULO 1

1. (ii) $(x - y)(x + y) = [x + (-y)](x + y) = x(x + y) + (-y)(x + y)$
$$= x(x + y) - [y(x + y)] = x^2 + xy - [yx + y^2]$$
$$= x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2.$$

(iv) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x(x^2 + xy + y^2) - [y(x^2 + xy + y^2)]$
$$= x^3 + x^2y + xy^2 - [yx^2 + xy^2 + y^3] = x^3 - y^3.$$

(v) $(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
$$= x(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$
$$- [y(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})]$$
$$= x^n + x^{n-1}y + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1}$$
$$- [x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n] = x^n - y^n.$$

(Utilizando la notación del capítulo 2, esta demostración puede escribirse como sigue:

$$(x - y) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j} = x\Big(\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}\Big) - \Big[y\Big(\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}\Big)\Big]$$
$$= x^n + \sum_{j=0}^{n-2} x^{j+1} y^{n-1-j} - \Big[\sum_{j=1}^{n-1} x^j y^{n-j} + y^n\Big]$$
$$= x^n + \sum_{j=0}^{n-2} x^{j+1} y^{n-1-j} - \Big[\sum_{k=0}^{n-2} x^{k+1} y^{n-(k+1)} + y^n\Big]$$
(poniendo $k = j - 1$)
$$= x^n - y^n.$$

Para una demostración formal hace falta un esquema de este tipo, en el cual la expresión $(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ se sustituye por el símbolo $\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}$. Digamos de paso que hemos utilizado otras manipulaciones justificables todas ellas mediante razonamientos inductivos.)

3. (iv) $(a/b)(c/d) = (ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$ (según (iii)) $= (ac)/(bd)$.

4. (ii) Todo x.
   (iv) $x > 3$ o $x < 1$.
   (vi) $x > [-1 + \sqrt{5}]/2$ o $x < [-1 - \sqrt{5}]/2$.
   (viii) Todo x, ya que $x^2 + x + 1 = [x + (1/2)]^2 + 3/4$.
   (x) $x > \sqrt{2}$ o $x < \sqrt[3]{2}$.
   (xii) $x < 1$.
   (xiv) $x > 1$ o $x < -1$.

5. (ii) $b - a$ está en P, de modo que $-a-(-b)$ está en P.
   (iv) $b - a$ está en P y c está en P, de modo que $c(b-a) = bc - ac$ está en P.
   (vi) Si $a > 1$, entonces $a > 0$, de modo que $a^2 > a \cdot 1$, según la parte (iv).
   (viii) Si $a = 0$ o $c = 0$, entonces $ac = 0$, pero $bd > 0$, con lo que $ac < bd$. En otro caso tenemos $ac < bc < bd$ al aplicar la parte (iv) dos veces.
   (x) Si $a < b$ fuese falso, entonces o bien $a = b$ o bien $a > b$. Pero si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$, y si $a > b \geqslant 0$, entonces $a^2 > b^2$, según la parte (ix).

6. Si $a < b$, entonces

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b.$$

Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < ab$ según el problema 5(iv), de modo que $a < \sqrt{ab}$, según el problema 5(x). Además, $(a-b)^2 > 0$, con lo que

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 > 2ab, \\ a^2 + 2ab + b^2 > 4ab, \\ (a+b)^2 > 4ab, \end{gathered}$$

de modo que $a + b > 2\sqrt{ab}$.

7. (a) Si $x > 0$ e $y \leqslant 0$, entonces $x^n > 0$ e $y^n \leqslant 0$ (puesto que n es impar) y las relaciones análogas se cumplen si $x \leqslant 0$ e $y > 0$; ninguna de las dos alternativas podrá por lo tanto ser válida si $x^n = y^n$. Además, si $x^n = y^n$ y $x, y < 0$, entonces $(-x)^n = (-y)^n$; así pues, si el enunciado es válido para números positivos, entonces $-x = -y$, y en consecuencia $x = y$. Basta pues considerar el caso $x, y > 0$. Si esto ocurre, $x < y$ implica $x^n < y^n$, y lo análogo se cumple si es $y < x$, de modo que ninguna de las dos alternativas puede ser válida.

(b) Si $x,y > 0$ o $x,y < 0$, entonces $x = y$, como en la parte (a). Si $x < 0$ e $y > 0$, entonces $(-x)^n = y^n$, ya que n es par, de modo que $-x = y$; lo análogo vale si es $x > 0$ e $y < 0$.

8. Dos aplicaciones sucesivas de $P'12$ hacen ver que si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + c < b + d$, de modo que $a + c < b + d$, según $P'11$. En particular, si $0 < b$ y $0 < d$, entonces $0 < b + d$, lo cual demuestra $P11$. Se sigue de ahí, además, que si $a < 0$, entonces $-a > 0$; ya que si $-a < 0$ se cumpliera, entonces $0 = a + (-a) < 0$, en contradicción con $P'10$. En consecuencia, cualquier número a satisface exactamente una de las condiciones $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$, la última de las cuales equivale a $-a > 0$. Esto demuestra $P10$. Finalmente, $P'13$ hace ver que si $0 < a$ y $0 < c$, entonces $0 < ac$, lo cual demuestra $P12$.

9. (ii) $|a| + |b| - |a + b|$.
   (iv) $x^2 - 2xy + y^2$.

10. (ii) $x - 1$ si $x \geqslant 1$;
   $1 - x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$;
   $1 + x$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$;
   $-1 - x$ si $x \leqslant -1$.
   (iv) a si $a \geqslant 0$;
   $3a$ si $a \leqslant 0$.

11. (ii) $-5 < x < 11$.
   (iv) $x < 1$ o $x > 2$ (la suma de las distancias desde x a 1 y a 2, es igual a 1 precisamente cuando $1 \leqslant x \leqslant 2$).
   (vi) Ningún x.
   (viii) Si $x > 1$ o $x < -2$, entonces la condición se convierte en $(x-1)(x+2) = 3$, o $x^2 + x - 5 = 0$, cuyas soluciones son $(-1 + \sqrt{21})/2$ y $(-1 - \sqrt{21})/2$. Puesto que el primer valor es > 1 y el segundo es < -2, ambos son soluciones de $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$. Para $-2 < x < 1$, la condición se convierte en $(1 - x)(x + 2) = 3$ o $x^2 + x + 1 = 0$, la cual carece de soluciones.

12. (ii) $|1/x| \cdot |x| = |(1/x) \cdot x|$ (por (i)) $= |1| = 1$, de modo que $|1/x| = 1/|x|$.
   (iv) $|x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|$.
   (vi) El intercambio de x con y en la parte (v) proporciona $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Al combinar esto con la parte (v) se obtiene $|(|x| - |y|)| \leqslant |x - y|$.

13. Si $x \leqslant y$, entonces $|y - x| = y - x$, con lo que $x + y + |y - x| = x + y + y - x = 2y$, lo cual es $2 \max(x,y)$. El intercambio de x con y demuestra la fórmula cuando $x \geqslant y$, y el mismo tipo de razonamiento vale para obtener $\min(x,y)$. Aplicando lo anterior se obtiene también,

$$\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)) = \frac{x + \dfrac{y + z + |y - z|}{2} + \left|\dfrac{y + z + |y - z|}{2} - x\right|}{2}$$

$$= \frac{|y - z| + y + z + 2x + |y + z + |y - z| - 2x|}{4}.$$

14. (a) Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a = -(-a) = |-a|$, ya que $-a \leqslant 0$. Sustituyendo a por $-a$ se obtiene la igualdad para $a \leqslant 0$.

(b) Si $|a| \leqslant b$, entonces es claro que $b \geqslant 0$. Pero $|a| \leqslant b$ significa que $a \leqslant b$ si $a \geqslant 0$, y por supuesto $a \leqslant b$ si $a \leqslant 0$. Análogamente, $|a| \leqslant b$ significa que $-a \leqslant b$, y en consecuencia $-b \leqslant a$, si $a \leqslant 0$, y de seguro $-b \leqslant a$ si $a \geqslant 0$. Así pues, $-b \leqslant a \leqslant b$.

Recíprocamente, si $-b \leqslant a \leqslant b$, entonces $|a| = a \leqslant b$ si $a \geqslant 0$, mientras que $|a| = -a \leqslant b$ si $a \leqslant 0$.

(c) Partiendo de $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ y $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, se sigue que

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

de donde $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

15. (a) Si $x^2 + xy + y^2 = 0$, entonces $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$, de modo que $x = y$. Pero en este caso, $x^2 + xy + y^2 = 3x^2 \neq 0$, puesto que $x \neq 0$, lo cual es una contradicción. La otra desigualdad se demuestra de modo análogo.

(b) De las desigualdades conocida y supuesta

$$x^2 + 2xy + y^2 \geqslant 0,$$
$$x^2 + \ \ xy + y^2 < 0,$$

se sigue, al restar, que $xy \geqslant 0$. Pero esto implica que $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$, contra lo supuesto.

(c) Partiendo de

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 \geqslant 0,$$
$$4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0,$$

se seguiría que $2xy \geqslant 0$, en contra de la desigualdad supuesta, lo mismo que en la parte (a). La otra desigualdad se trata de modo análogo.

(d) De

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \geqslant 0,$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 < 0,$$

se sigue que

$$0 < 3x^3y + 5x^2y^2 + 3xy^3 = xy(3x^2 + 5xy + 3y^2).$$

Si x e y no son ambas 0, entonces la expresión entre paréntesis es positiva, según la parte (c), con lo que $xy \geqslant 0$ y x e y tienen el mismo signo. Pero esto implica que

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \geqslant 0,$$

lo cual es una contradicción.

16. (a) Si

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

entonces $xy = 0$, de modo que $x = 0$ o $y = 0$. Si

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

entonces $3xy(x+y) = 0$, de modo que $x = 0$ o $y = 0$ o $x = -y$.

(b) Si

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

entonces

$$0 = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = xy(4x^2 + 6xy + 4y^2),$$

de modo que $x = 0$ o $y = 0$ según el problema 15(c).

(c) Si

$$x^5 + y^5 = (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5,$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 \\ &= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3), \end{aligned}$$

de modo que $xy = 0$ o

$$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0.$$

Restando esta ecuación de

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

obtenemos

$$(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y).$$

Así pues, o bien $x + y = 0$ o $(x + y)^2 = xy$; la última condición implica que $x^2 + xy + y^2 = 0$, con lo que $x = 0$ o $y = 0$ según el problema 15(a). Por lo tanto $x = 0$ o $y = 0$ o $x = -y$.

17. (a) Es una comprobación directa.

(b) Tenemos

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) \geqslant c - \frac{b^2}{4};$$

pero $c - b^2/4 > 0$, de modo que $x^2 + bx + c > 0$ para todo x.

(c) Aplíquese la parte (b) poniendo y en vez de b e y^2 en vez de c: se tiene $b^2 - 4c = y^2 - 4y^2 < 0$ para $y \neq 0$, de modo que $x^2 + xy + y^2 > 0$ para todo x, si $y \neq 0$ (y de seguro $x^2 + xy + y^2 > 0$ para todo $x \neq 0$ si $y = 0$).

(d) α debe satisfacer $(\alpha y)^2 - 4y^2 < 0$, o $\alpha^2 < 4$, o $|\alpha| < 2$.

(e) Por ser

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) \geqslant c - \frac{b^2}{4},$$

y puesto que $x^2 + bx + c$ tiene el valor $c - b^2/4$ cuando $x = -b/2$, el valor mínimo es $c - b^2/4$. Puesto que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

el mínimo es

$$a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

18. (a) La igualdad sale por comprobación directa. Al ser $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0$, se desprende inmediatamente la desigualdad de Schwartz.

(b) Las demostraciones cuando $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$, o $y_1 = y_2 = 0$, son directas. Si un tal λ no existe, entonces la ecuación

$$\lambda^2(y_1^2 + y_2^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1^2 + y_1^2) = 0$$

carece de solución en λ, de modo que por el problema 17(a) tenemos

$$\left[\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{(y_1^2 + y_2^2)}\right]^2 - \frac{4(x_1^2 + y_1^2)}{(y_1^2 + y_2^2)} < 0,$$

lo cual proporciona la desigualdad de Schwartz.

(c) Tenemos $2xy \leqslant x^2 + y^2$, ya que $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Así pues

$$(1) \quad \frac{2x_1y_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \leqslant \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)} + \frac{y_1^2}{(y_1^2+y_2^2)};$$

$$(2) \quad \frac{2x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \leqslant \frac{x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)} + \frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)};$$

al sumar se obtiene

$$\frac{2(x_1y_1+x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \leqslant 2.$$

(d) En la parte (a), la igualdad se cumple solamente cuando $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$. Una posibilidad es $y_1 = y_2 = 0$. Si $y_1 \neq 0$, entonces $x_1 = (x_1/y_1)y_1$ y también $x_2 = (x_1/y_1)y_2$; análogamente, si $y_2 \neq 0$, entonces $\lambda = x_2/y_2$.

La demostración de la parte (b) proporciona ya el resultado deseado.

En la parte (c), la igualdad se cumple solamente cuando se cumple al mismo tiempo en (1) y en (2). Al ser $2xy = x^2 + y^2$ solamente cuando $0 = (x-y)^2$ o sea $x = y$, significa esto que

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \qquad \text{para } i = 1,\ 2,$$

de modo que podemos elegir $\lambda = \sqrt{x_1^2+x_2^2}/\sqrt{y_1^2+y_2^2}$.

19, 20, 21. Véase el Capítulo 5.

22. Según el problema 20, tenemos $|x/y - x_0/y_0| < \epsilon$ si

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\epsilon}{2(1/|y_0|+1)},\ 1\right)$$

y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)},$$

y lo último se cumple, según el problema 21, si

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2},\ \frac{\epsilon\,|y_0|^2}{4(|x_0|+1)}\right).$$

23. (a) Para $k = 1$, la ecuación es $a_1 + a_2 = a_1 + a_2$. Si la ecuación se cumple para k, entonces

$(a_1 + \ldots + a_{k+1}) + a_{k+2} = [(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}] + a_{k+2}$

$$= (a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2}) \qquad \text{por } P1$$
$$= a_1 + \dots + a_k + (a_{k+1} + a_{k+2})$$
ya que la ecuación se cumple para k
$$= a_1 + \dots + a_{k+2} \qquad \text{según la definición de } a_1 + \dots + a_{k+2}.$$

(b) Para $k = 1$ la ecuación se reduce a la definición de $a_1 + \dots + a_k$. Si la ecuación se cumple para $k < n$, entonces

$$(a_1 + \dots + a_{k+1}) + (a_{k+2} + \dots + a_n) = ([a_1 + \dots + a_k] + a_{k+1}) + (a_{k+2} + \dots + a_n)$$
según la parte (a)
$$= (a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + (a_{k+2} + \dots + a_n)) \text{ por } P1$$
$$= (a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_n)$$
según la definición de $a_{k+1} + \dots + a_n$
$$= a_1 + \dots + a_n \qquad \text{por hipótesis.}$$

(c) La demostración es por «inducción completa» sobre k (véase el Capítulo 2). El aserto es claro para $k = 1$. Supóngase que se cumple para todo $\ell < k$. Entonces

$$s(a_1, \dots, a_k) = s'(a_1, \dots, a_\ell) + s''(a_{\ell+1}, \dots, a_k)$$
$$= (a_1 + \dots + a_\ell) + (a_{\ell+1} + \dots + a_k) \qquad \text{por hipótesis}$$
$$= a_1 + \dots + a_k \qquad \text{por la parte (b).}$$

24. $P2, P3, P4, P6, P7, P8$ resultan evidentes sin más que observar las tablas. Se presentan ocho casos para $P1$ y este número puede incluso reducirse: al cumplirse $P2$, resulta claro que $a + (b + c) = (a + b) + c$ si a, b, o c es 0, de modo que bastará comprobar el caso $a = b = c = 1$. Una observación análoga puede hacerse para $P5$. Finalmente, $P9$ se cumple para $a = 0$, ya que $0 \cdot b = 0$ para todo b, y para $a = 1$, ya que $1 \cdot b = b$ para todo b.

CAPíTULO 2

1. (ii) Al ser $1^3 = 1^2$, la fórmula es válida para $n = 1$. Supóngase que sea válida para k. Entonces

$$\begin{aligned}
(1 + \ldots + k + [k+1])^2 &= (1 + \ldots + k)^2 + 2(1 + \ldots + k)(k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3 + \ldots + k^3 + 2\,\frac{k(k+1)}{2}(k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3 + \ldots + k^3 + (k^3 + 2k^2 + k) + (k^2 + 2k + 1) \\
&= 1^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3,
\end{aligned}$$

con lo que la fórmula es válida para $k + 1$.

2. (ii)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 &= 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 \\
&= [1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2] \\
&= [1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2] - 4[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2] \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)[4n+1-2(n+1)]}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.
\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{kn!}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!\,(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

(b) Claramente $\binom{1}{1}$ es un número natural. Supóngase que $\binom{n}{p}$ es un número natural para todo $p \leqslant n$. Al ser

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad \text{para} \quad p \leqslant n,$$

se sigue que $\binom{n+1}{p}$ es un número natural para todo $p \leqslant n$, mientras que $\binom{n+1}{n+1}$ es también un número natural. Así pues, $\binom{n+1}{p}$ es un número natural para todo $p \leqslant n+1$.

(c) Existen $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ k-tuplas de enteros distintos elegidos entre $1, \ldots, n$, ya que el primero puede ser elegido de n maneras, el segundo de $n-1$ maneras, etc. Ahora bien, cada conjunto formado exactamente por k enteros distintos, da lugar a $k!$ k-tuplas, de modo que el número de conjuntos será $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)/k!$ $= \binom{n}{k}$.

(d) El teorema del binomio resulta claro para $n = 1$. Supóngase que

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j \\
&\qquad \text{(hemos sustituido } j \text{ por } j-1 \text{ en la segunda suma)} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j \qquad \text{según la parte (a),}
\end{aligned}$$

con lo que el teorema del binomio es válido para $n+1$.

(e) (i) $2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$,

(ii) $0 = (1 + -1)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$.

5. (ii) Partiendo de

$$(k + 1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \qquad k = 1, \ldots, n$$

obtenemos

$$(n + 1)^5 - 1 = 5\left(\sum_{k=1}^{n} k^4\right) + 10\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 10\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 5\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n,$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(n + 1)^5 - 1 - 10\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right) - 10\,\frac{n(n + 1)(n + 2)}{6} - 5\,\frac{n(n + 1)}{2} - n}{5}$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

(iv) Partiendo de

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k + 1)^2} = \frac{2k + 1}{k^2(k + 1)^2} \qquad k = 1, \ldots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{(n + 1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k + 1}{k^2(k + 1)^2}.$$

6. La demostración es por inducción completa sobre p. El enunciado es válido para $p = 1$, ya que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n^2}{2} + n/2$$

Supóngase que el enunciado sea válido para todos los números naturales $\leqslant p$. El teorema del binomio proporciona las ecuaciones

$(k + 1)^{p+1} - k^{p+1} = (p + 1)k^p +$ términos que encierran potencias inferiores de k.

Sumando para $k = 1, \ldots, n$, obtenemos

$$\frac{(n + 1)^{p+1}}{p + 1} = \sum_{k=1}^{n} k^p + \text{términos que encierran } \sum_{k=1}^{n} k^r \text{ para } r < p.$$

Por hipótesis, podemos poner cada $\sum_{k=1}^{n} k^r$ en forma de una expresión con-teniendo potencias n^s con $s \leqslant p$. Se sigue que

$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$ + términos que encierran potencias de n menores que $p+1$.

9. Supóngase que A contiene 1, y que A contiene $n+1$ si contiene n. Si A no contiene todos los números naturales, entonces el conjunto B de números naturales quc *no están* en A es distinto de $\varnothing$. Por lo tanto B tiene un elemento mínimo n_0. Ahora bien, $n_0 \neq 1$, ya que A contiene 1, de modo que podemos poner $n_0 = (n_0 - 1) + 1$ donde $n_0 - 1$ es un número natural. Pero $n_0 - 1$ *no está* en B y por lo tanto $n_0 - 1$ *está* en A. Por hipótesis, n_0 tiene que estar en A, con lo que n_0 no está en B, contra lo supuesto (Digamos de paso que el aserto de que un número natural $n \neq 1$ puede ponerse en la forma $n = m + 1$ para algún número natural m, puede ser demostrado a su vez por inducción.)

10. Que 1 está en B es claro. Si k está en B, entonces $1, \ldots, k$ están todos en A, de modo que $k+1$ está en A y así $1, \ldots, k+1$ están en A, con lo que $k+1$ está en B. Por inducción (ordinaria), $B = \mathbf{N}$, así que también $A = \mathbf{N}$.

13. (a) Si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fuese racional, entonces $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ sería ciertamente racional. Así pues, $5 + 2\sqrt{6}$ sería racional y en consecuencia $\sqrt{6}$ sería racional, lo cual es falso.

    (b) Si $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ fuese racional, lo mismo ocurriría entonces con

$$\begin{aligned}[\sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 &= 6 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= 11 + 2\sqrt{6}\,[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})].\end{aligned}$$

Así pues, $\sqrt{6}\,[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]$ sería racional, con lo que igualmente lo sería

$$\begin{aligned}\{\sqrt{6}\,[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]\}^2 &= 6\,[1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 \\ &= 6\,[6 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{6}].\end{aligned}$$

De este modo

$$\sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \qquad \text{y} \qquad \sqrt{6} - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

serían los dos racionales, lo que implicaría que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fuera racional, en contradicción con la parte (a).

14. (a) El aserto se cumple para $m = 1$. Si se cumple para m, entonces

$$(p + \sqrt{q})^{m+1} = (p + \sqrt{q})(a + b\sqrt{q}) = (ap + b) + (a + pb)\sqrt{q},$$

con lo que $ap + b$ y $a + pb$ son racionales.

(b) El aserto se cumple para $m = 1$. Si se cumple para m, entonces

$$(p - \sqrt{q})^{m+1} = (p - \sqrt{q})(a - b\sqrt{q}) = (ap + b) - (a + pb)\sqrt{q},$$

mientras que

$$(p + \sqrt{q})^{m+1} = (ap + b) + (a + pb)\sqrt{q}$$

según la parte (a).

15. (a) La desigualdad $(m + 2n)^2/(m + n)^2 > 2$ equivale a

$$m^2 + 4mn + 4n^2 > 2m^2 + 4mn + 2n^2,$$

o simplemente $2n^2 > m^2$.

La segunda desigualdad equivale a

$$n^2[(m + 2n)^2 - 2(m + n)^2] < (2n^2 - m^2)(m + n)^2,$$

o

$$n^2(2n^2 - m^2) < (2n^2 - m^2)(n^2 + [2mn + m^2]),$$

o

$$0 < (2n^2 - m^2)(2mn + m^2).$$

(b) Inviértanse todos los signos de desigualdad en la solución de la parte (a).

(c) Sea $m_1 = m + 2n$ y $n_1 = m + n$. Elíjase ahora

$$m' = m_1 + 2n_1 = 3m + 4n,$$
$$n' = m_1 + n_1 = 2m + 3n.$$

16. (a) Supóngase que todo número $< n$ puede expresarse como producto de números primos. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$ siendo a y b menores que n. Según lo supuesto, a y b son ambos productos de números primos, con lo que también lo es $n = ab$.

(b) Si $\sqrt{n} = a/b$, entonces $nb^2 = a^2$, con lo que las descomposiciones en producto de factores primos de nb^2 y de a^2 deberán coincidir. Ahora bien, cada número primo debe aparecer un número par de veces en la descomposición de a^2 y en la de b^2 y por lo tanto deberá ocurrir lo mismo con la descomposición de n. Esto implica que n es un cuadrado perfecto.

(c) Repítase el mismo razonamiento haciendo uso del hecho de que cada número primo entra en a^k y en b^k un número de veces que es múltiplo de k.

(d) Si $p_1, \ldots, p_n$ fuesen los únicos números primos, entonces $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ no podría ser primo, ya que (siendo distinto de 1) es mayor que cada uno de ellos, de modo que tiene que ser divisible por un número primo. Pero es claro que este número primo no es ninguno de los $p_1, \ldots, p_n$, lo cual constituye una contradicción. (Esta demostración, a pesar de ser por reducción al absurdo, proporciona alguna información positiva: Si $p_1, \ldots, p_n$ son los n primeros números primos, entonces el primo que ocupa el lugar $n + 1$ es $\leqslant p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Sin embargo, $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ no tiene que ser necesariamente primo; por ejemplo, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031 = 59 \times 509$.)

17. (a) Supóngase que es $x = p/q$ donde p y q son números naturales primos entre sí. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_0 = 0,$$

con lo que

$$(*) \quad p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_0q^n = 0.$$

Ahora bien, si $q \neq \pm 1$, entonces q tiene por lo menos un divisor primo. Este divisor primo divide a cada uno de los términos de (*) que siguen a p^n, con lo que también deberá dividir a p^n. Dividirá por lo tanto a p, lo cual es una contradicción. Así pues, $q = \pm 1$, lo que significa que x es entero.

(b) Poniendo las distintas potencias de $x = 2^{2/6} + 2^{3/6}$ en términos de $\eta = 2^{1/6}$, se obtiene la siguiente tabla de coeficientes.

	η^0	η	η^2	η^3	η^4	η^5
x^0	1					
x^1			1	1		
x^2	2				1	2
x^3	2	6	6	2		
x^4			2	8	12	8
x^5	40	40	20	4	2	10
x^6	12	24	60	80	60	24

Podemos pues hallar números $a_0, \ldots, a_5$ tales que

$$x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

sin más que resolver las ecuaciones $a_0 + 2a_2 + 2a_3 + 40a_5 + 12 = 0$, etcétera. Resulta que

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 = 0.$$

La parte (a) implica que x es o bien irracional o bien entero y es fácil ver que x no es entero, ya que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ y $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$, con lo que $2{,}6 < \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} < 2{,}8$.

Es éste uno de los problemas en los que un poco de artificio, cosa quizá a veces peligrosa, puede ahorrar mucho trabajo. La ecuación en x puede también obtenerse observando que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ satisface claramente la ecuación

$$[(x - \sqrt{2})^3 - 2] \cdot [(x + \sqrt{2})^3 - 2] = 0;$$

al operar en el primer miembro, se obtiene

$$\begin{aligned}
&(x-2)^3 + 4 - 2 \cdot [(x - \sqrt{2})^3 + (x + \sqrt{2})^3] \\
&\quad = (x-2)^3 + 4 - 2 \cdot [2x^3 + 12x] \quad \text{(las potencias impares de } x \text{ se destruyen)} \\
&\quad = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4.
\end{aligned}$$

Este método se basa, por supuesto, en la observación de que la ecuación en $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ debe también tener por raíz $-\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (una idea de por qué esto tiene que ser así puede hallarse en el problema 24-8).

19. Al ser

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1,$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1,$$

la fórmula es válida para $n = 1$ y para $n = 2$. Supóngase que es válida para todo $k < n$, donde $n \geqslant 3$. En tal caso es válida en particular para $n - 1$ y para $n - 2$, con lo que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}.$$

20. (a) Si $a_1 = \ldots = a_n$, entonces se cumple la igualdad. Si se sustituye a_i y a_j por $(a_i + a_j)/2$, la media aritmética A_n permanece inalterada, mientras que G_n se convierte en

$$G_n' = \frac{G_n \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)}}{\sqrt[n]{a_i a_j}}$$

$$\geqslant G_n, \text{ ya que } \left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)^2 \geqslant a_i a_j \quad \text{según el problema 1-6.}$$

Al repetir este proceso suficiente número de veces se llega a tener todas las a_i iguales, con lo que existe una sucesión de medias geométricas.

$$G_n \leqslant G_n' \leqslant G_n'' \leqslant \ldots \leqslant G_n^{(k)} = A_n.$$

(b) Sabemos que $G_n \leqslant A_n$ cuando $n = 2^1$. Supóngase que $G_n \leqslant A_n$ para $n = 2^k$ y sea $m = 2^{k+1} = 2n$. Entonces

$$G_m = \sqrt[m]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,\sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_m}}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_m}}{2} \qquad \text{aplicando } G_2 \leqslant A_2$$

$$\leqslant \frac{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_m}{n}}{2} \qquad \text{según lo supuesto}$$

$$= \frac{a_1 + \ldots + a_m}{2n} = A_m.$$

(c) Aplicando (b) a estos 2^m números se obtiene, para $k = 2^m - n$,

$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)(A_n)^k \leqslant \left[\frac{a_1 + \ldots + a_n + k\,A_n}{2^m}\right]^{2^m}$$
$$= \left[\frac{nA_n + k\,A_n}{2^m}\right]^{2^m} = (A_n)^{2^m},$$

con lo que

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant (A_n)^{2^m - k} = (A_n)^n.$$

21. Puesto que $a^{n+1} = a^n \cdot a = a^n \cdot a^1$, la primera ecuación se cumple para $m = 1$. Supóngase que $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$. Entonces

$$\begin{aligned} a^{n+(m+1)} &= a^{(n+m)+1} = a^{n+m} \cdot a && \text{por definición} \\ &= (a^n \cdot a^m) \cdot a \\ &= a^n \cdot (a^m \cdot a) \\ &= a^n \cdot a^{m+1} && \text{por definición,} \end{aligned}$$

con lo que la primera ecuación se cumple para $m + 1$.

Al ser $(a^n)^1 = a^n = a^{n \cdot 1}$, la segunda ecuación se cumple para $m = 1$. Supóngase que $(a^n)^m = a^{nm}$. Entonces

$$\begin{aligned} (a^n)^{m+1} &= (a^n)^m \cdot a^n && \text{por definición} \\ &= a^{nm} \cdot a^n \\ &= a^{nm+n} \\ &= a^{n(m+1)}. \end{aligned}$$

22. Al ser

$$\begin{aligned} 1 \cdot (b + c) &= b + c && \text{por definición} \\ &= 1 \cdot b + 1 \cdot c && \text{por definición,} \end{aligned}$$

el primer resultado es válido para $a = 1$. Supóngase que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo b y c. Entonces

$$\begin{aligned} (a + 1) \cdot (b + c) &= a \cdot (b + c) + (b + c) && \text{por definición} \\ &= (a \cdot b + a \cdot c) + (b + c) \\ &= (a \cdot b + b) + (a \cdot c + c) && \text{por } P1 \text{ y } P4 \\ &= (a + 1) \cdot b + (a + 1) \cdot c && \text{por definición.} \end{aligned}$$

La ecuación $a \cdot 1 = a$ vale para $a = 1$ por definición. Supóngase que $a \cdot 1 = a$. Entonces

$$\begin{aligned} (a + 1) \cdot 1 &= a \cdot 1 + 1 \cdot 1 && \text{por definición} \\ &= a + 1. \end{aligned}$$

Para $b = 1$, la ecuación $a \cdot b = b \cdot a$ es consecuencia de $a \cdot 1 = a$, que acaba de ser demostrada, y de $1 \cdot a = a$, que vale por definición. Supóngase que $a \cdot b = b \cdot a$. Entonces

$$\begin{aligned} a \cdot (b+1) &= a \cdot b + a \cdot 1 \\ &= a \cdot b + a \\ &= b \cdot a + a \\ &= (b+1) \cdot a \qquad \text{por definición.} \end{aligned}$$

23. (a) (i) Está claro.

(ii) Esto está claro, ya que 1 es positivo, y si k es positivo, entonces $k + 1$ es positivo.

(iii) Está claro que 1 pertenece a este conjunto. Si para el mismo no se cumpliera la condición (2), existiría entonces en el conjunto algún k con $k + 1 = 1/2$. Pero esto es falso, ya que $k = -1/2$ no es positivo.

(iv) Este conjunto contiene 4, pero no $4 + 1$.

(v) Al estar 1 en A y en B, también está en C. Si k está en C, entonces k está a la vez en A y en B, con lo que $k + 1$ está en A y en B, de modo que $k + 1$ está en C.

(b) (i) 1 es un número natural, puesto que 1 está en todo conjunto inductivo, por la misma definición de conjunto inductivo.

(ii) Si k es un número natural, entonces k está en todo conjunto inductivo. Así pues, $k + 1$ está en todo conjunto inductivo. Por lo tanto, $k + 1$ es un número natural.

CAPÍTULO 3

1. (ii) $x/(x+1)$ (para $x \neq 0, -1$).
   (iv) $1/(1+x+y)$ (para $x+y \neq -1$).
   (vi) Para todo c, ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$.

2. (ii) Para y racional entre -1 y 1, y para todo y con $|y| > 1$.
   (iv) Para todo w con $0 \leqslant w \leqslant 1$.

3. (ii) $\{x : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
   (iv) $\{-1, 1\}$.

4. (ii) $\operatorname{sen}^2 y$.
   (iv) $\operatorname{sen} t^3$.

5. (ii) $s \circ P$.
   (iv) $S \circ s$.
   (vi) $s \circ (P + P \circ S)$.
   (viii) $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$.

6. (a) Póngase

$$f_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}.$$

   (b) Póngase

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_i f_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

7. (a) Si el grado de f es 1, entonces f es de la forma

$$f(x) = cx + d = c\,(x - a) + (d + ac),$$

de modo que podemos poner $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Supóngase que el resultado es válido para polinomios de grado $\leqslant k$. Si f tiene grado $k + 1$, entonces f tiene la forma

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Pero la función polinómica $h(x) = f(x) - a_{k+1}(x - a)$ tiene grado $\leqslant k$, de modo que podemos poner

$$f(x) - a_{k+1}(x - a) = (x - a)\,g(x) + b,$$

o

$$f(x) = (x - a)\,[g(x) + a_{k+1}] + b,$$

con lo que tenemos la forma requerida.

(b) Por la parte (a), podemos poner $f(x) = (x - a)\,g(x) + b$. Entonces

$$0 = f(a) = (a - a)\,g(a) + b = b,$$

de modo que $f(x) = (x - a)\,g(x)$.

(c) Supóngase que f tiene n raíces $a_1, \ldots, a_n$. Entonces según la parte (b) podemos poner $f(x) = (x - a)\,g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n - 1$. Pero

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)\,g_1(a_2),$$

de modo que $g_1(a_2) = 0$, ya que $a_2 \neq a_1$. Podemos pues escribir

$$f(x) = (x - a_1)\,(x - a_2)\,g_2(x),$$

donde el grado de g_2 es $n - 2$. Prosiguiendo de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x - a_1)\,(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)c$$

para algún número $c \neq 0$. Está claro que $f(a) \neq 0$ si $a \neq a_1, \ldots, a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

(d) Si $f(x) = (x - 1)\,(x - 2) \cdot \ldots \cdot (x - n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x) = x^n + 1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ tiene una raíz única, que es 0.

8. Si

$$x = f(f(x)) = \frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d}$$

para todo x, entonces

$$(ac+cd)x^2+(d^2-a^2)x-ab-bd=0 \qquad \text{para todo } x,$$

de modo que

$$\begin{aligned} ac+cd&=0,\\ ab+bd&=0,\\ d^2-a^2&=0. \end{aligned}$$

Se sigue que $a=d$ o $a=-d$. Una posibilidad es $a=d=0$, en cuyo caso $f(x)=b/(cx)$, que satisface $f(f(x))=x$ para todo $x\neq 0$. Si $a=d\neq 0$, entonces $b=c=0$, con lo que $f(x)=x$. La tercera posibilidad es $a+d=0$, de modo que $f(x)=(ax+b)/(cx-a)$, la cual satisface $f(f(x))=x$ para todo $x\neq a/c$. Estrictamente hablando, podemos añadir la condición $f(x)\neq a/c$ para $x\neq a/c$, lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a}\neq\frac{a}{c},$$

o $a^2+bc\neq 0$.

9. (a)

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}&=C_A\cdot C_B,\\ C_{\mathbf{R}-A}&=1-C_A,\\ C_{A\cup B}&=C_A+C_B-C_A\cdot C_B. \end{aligned}$$

(b) Póngase $A=\{x: f(x)=1\}$.

(c) $f=f^2$ si y sólo si $f(x)=0$ ó 1 para todo x; siendo así, puede aplicarse ahora la parte (b).

10. (a) Para las funciones f que satisfacen $f(x)\geqslant 0$ para todo x.

(b) Para las funciones f con $f(x)\neq 0$ para todo x.

(c) Para las funciones b y c que satisfacen $(b(t))^2-4c(t)\geqslant 0$ para todo t.

(d) $b(t)$ tiene que ser igual a 0 siempre que $a(t)=0$. Si $a(t)\neq 0$ para todo t, entonces existe una función única con esta condición, que es $x(t)=a(t)/b(t)$. Si $a(t)=0$ para algún t, entonces puede elegirse arbitrariamente $x(t)$, de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

11. (d) Dar a $H(1)$, $H(2)$, $H(13)$, $H(36)$, $H(\pi/3)$, y $H(47)$ los valores especificados y hágase $H(x) = 0$ para $x \neq 1, 2, 13, 36, \pi/3, 47$. Al ser, en particular, $H(0) = 0$, la condición $H(H(x)) = H(x)$ se cumple para todo x.

(e) Hágase $H(1) = 7$, $H(7) = 7$, $H(17) = 18$, $H(18) = 18$, y $H(x) = 0$ para $x \neq 1, 7, 17, 18$.

13. (a) Hágase.

$$E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

(b) Si $f = E + O$, siendo E par y O impar, entonces

$$f(x) = E(x) + O(x),$$
$$f(-x) = E(x) - O(x).$$

Al resolver en $E(x)$ y $O(x)$ se obtienen los resultados vistos en la parte (a).

14. $\max(f, g) = (f + g + |f - g|)/2$; $\min(f, g) = (f + g - |f - g|)/2$. (Véase el Problema 1-13.)

15. (a) $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$, ya que $f(x) = \max(f(x), 0) + \min(f(x), 0)$ para todo x. al satisfacerse la ecuación $a = \max(a, 0) + \min(a, 0)$ cualquiera que sea el valor de a.

(b) Para cada x, elíjase números $g(x)$, $h(x) \geqslant 0$ con $f(x) = g(x) - h(x)$. Puesto que cada uno de los pares formados por $g(x)$ y $h(x)$, puede ser elegido de infinitas maneras, existirán infinitos pares de funciones g y h que realizarán la descomposición pedida de f.

16. (a) El resultado se cumple para $n = 1$. Si $f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$ para todo $x_1, \ldots, x_n$, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1 + \ldots + x_{n+1}) &= f([x_1 + \ldots + x_n] + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + \ldots + x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

(c) Pongamos $c = f(1)$. Para cualquier número natural n, se cumplirá que

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(1) + \ldots + f(1)}_{n \text{ veces}} = cn.$$

Al ser

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x),$$

se sigue que $f(0) = 0$. Ahora, puesto que

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

resulta que $f(-x) = -f(x)$. En particular, para cualquier número natural n,

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n).$$

Además,

$$\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ veces}} = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ veces}}\right) = f(1) = c,$$

de modo que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n},$$

y en consecuencia

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c \cdot \frac{1}{n} = c\left(\frac{1}{-n}\right).$$

Finalmente, cualquier número racional puede escribirse en la forma m/n, siendo m un número natural y n un entero; y entonces

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ veces}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ veces}}$$

$$= mc \cdot \frac{1}{n} = c \cdot \frac{m}{n}.$$

17. (a) Al ser $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$ y $f(a) \neq 0$ para algún a, resulta ser $f(1) = 1$.

(b) Según el problema 16, $f(x) = f(1)x = x$ para todo número racional x.

(c) Si $c > 0$, entonces $c = d^2$ para algún d, de modo que $f(c) = f(d^2) = (f(d))^2 \geqslant 0$. Además, no podemos tener $f(c) = 0$, ya que esto implicaría que

$$f(a) = f\left(c \cdot \frac{a}{c}\right) = f(c) \cdot f\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \qquad \text{para todo } a.$$

(d) Si $x > y$, entonces $x - y > 0$, con lo que $f(x) - f(y) > 0$ según la parte (c).

(e) Supóngase que $f(x) > x$ para algún x. Elíjase un número racional r con $x < r < f(x)$. Entonces, según las partes (b) y (d),

$$f(x) < f(r) = r < f(x),$$

lo cual constituye una contradicción. Análogamente, es imposible que $f(x) < x$. (Hay aquí un pequeño detalle que requiere justificación. Véase el Problema 8-5.)

18. Se satisface ciertamente la ecuación si ocurre que $f = 0$ o $g = 0$ y al mismo tiempo $h = 0$ o $k = 0$. De no ocurrir esto, existirá algún x con $f(x) \neq 0$ y algún y con $g(y) \neq 0$. Entonces $0 \neq f(x)\, g(y) = h(x)\, k(y)$, de modo que también se tendrá $h(x) \neq 0$ y $k(y) \neq 0$. Haciendo $\alpha = h(x)/f(x)$, tenemos $g(y') = \alpha k(y')$ para todo y'. Además, $\alpha = g(y)/k(y)$, de modo que tenemos también $h(x') = \alpha f(x')$ para todo x'. Tenemos, pues, que $g = \alpha k$ y $h = \alpha f$ para cierto número $\alpha \neq 0$.

19. (a) (i) Si $f(x) + g(y) = xy$ para todo x y para todo y, entonces, en particular,

$$f(x) + g(0) = 0 \qquad \text{para todo } x.$$

Así pues, $f(x) = -g(0)$ para todo x, y

$$-g(0) + g(y) = xy \qquad \text{para todo } y;$$

poniendo $x = 0$ obtenemos $g(y) = g(0)$. Debemos tener, pues,

$$0 = -g(0) + g(0) = xy \qquad \text{para todo } x \text{ e } y,$$

lo cual es absurdo.

(ii) Poniendo $x = 0$, obtenemos $f(y) = y$ (*) para todo y. De este modo

$$x + y = g(x) - y \qquad \text{para todo } y.$$

Por lo tanto, $g(x) = x$ para todo x. Así pues,

$$x + y = x - y \qquad \text{para todo } x \text{ e } y,$$

lo cual es absurdo.

(b) Como f y como g tómese una misma función constante. (Razonamientos análogos a los de la parte (a) hacen ver que ésta es la única posibilidad.)

(*) *Nota del traductor:* De $f(x + y) = g(x) - y$ se obtiene para $x = 0$, $f(y) = g(0) - y$ para todo y. Se observa pues aquí un error.

20. (a) Póngase $f(x) = x$.

(b) Para todo número natural n, tenemos

$$|f(y)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}[y-x]\right) - f\left(x + \frac{k-1}{n}[y-x]\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x + \frac{k}{n}[y-x]\right) - f\left(x + \frac{k-1}{n}[y-x]\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}(y-x)^2$$

$$= \frac{(y-x)^2}{n^2}.$$

Por lo tanto, $f(y) = f(x)$ para todo x y para todo y.

22. (a) Si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = g(y)$.

(b) Si $z = f(x)$, defínase $h(z) = g(x)$. Esta definición tiene sentido, ya que si $z = f(x')$, entonces $g(x) = g(x')$ según la parte (a). Si z no es de la forma $f(x)$, defínase h de cualquieer manera (o déjese sin definir). Tenemos entonces, para todo x del dominio de f, $g(x) = h(f(x))$.

23. (a) Supóngase $x \neq y$. Entonces $g(x) = g(y)$ implicaría que $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$, lo cual es una contradicción.

(b) $b = f(g(b))$, de modo que basta con poner $a = g(b)$.

24. (a) La hipótesis puede enunciarse como sigue: Si $x = y$, entonces $g(x) = g(y)$. La conclusión es ahora consecuencia del problema 22(b), aplicado a g y a I.

(b) Para cada x, elíjase un número a tal que $x = f(a)$. Llámese a este número $g(x)$. Entonces $f(g(x)) = x = I(x)$ para todo x.

25. Basta hallar una función f tal que $f(x) \neq f(y)$ si $x \neq y$, pero tal que no todo número sea de la forma $f(x)$, pues entonces según el problema 24(a) existirá una función g con $g \circ f = I$, y según el problema 23(b) no existirá ninguna función g con $f \circ g = I$. Una función que reúne estas condiciones es

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x > 0; \end{cases}$$

ningún número de los comprendidos entre 0 y 1 es de la forma $f(x)$.

26. $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ I = h$, y también $h \circ f \circ g = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$.

27. (a) La condición $f \circ g = g \circ f$ significa que $g(x) + 1 = g(x + 1)$ para todo x. Existen muchas funciones g que satisfacen esta condición. La función g puede en efecto definirse arbitrariamente para $0 \leqslant x < 1$ y para otros x pueden determinarse sus valores mediante esta ecuación.

(b) Si $f(x) = c$ para todo x, entonces $f \circ g = g \circ f$ si y sólo si $c = f(g(x)) = g(f(x)) = g(c)$, es decir, $c = g(c)$.

(c) Si $f \circ g = g \circ f$ para todo g, entonces se cumple esto en particular para todas las funciones constantes $g(x) = c$. Se sigue de la parte (b) que $f(c) = c$ para todo c.

28. (a) Es una simple comprobación.

(b) Sea f una función con $f(x) = 0$ para algún x, pero no para todo x. Entonces $f \neq 0$, pero claramente no existe ninguna función g con $f(x) \cdot g(x) = 1$ para todo x.

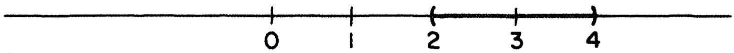
(c) Sean f y g dos funciones cuyos valores son todos 0 excepto en x_0 y x_1, siendo $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, $g(x_0) = 0$, $g(x_1) = 1$. Ninguna de ellas es 0, de modo que o bien f o bien $-f$ tendría que estar en P y lo mismo podría decirse de g o $-g$. Pero $(\pm f)(\pm g) = 0$, en contradicción con $P12$.

(d) $P'11$, $P'12$ y $P'13$ se cumplen. $P'10$ es falso; si bien se cumple a lo sumo una de las condiciones, no es necesariamente cierto que se tenga que cumplir por lo menos una de ellas. Por ejemplo, si $f(x) > 0$ para algún x y < 0 para otro x, entonces ninguna de las condiciones $f = 0$, $f < 0$ o $f > 0$ se cumple.

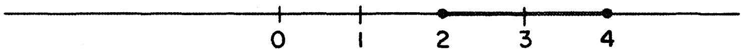
(e) No para el primer ejemplo; si $h(x) = -x$, entonces $f < g$ implica, en realidad, que $h \circ f > h \circ g$. Sí para el segundo, ya que $f(h(x)) < g(h(x))$ para todo x.

CAPÍTULO 4

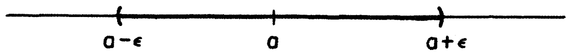
1. (i) $(2, 4)$.



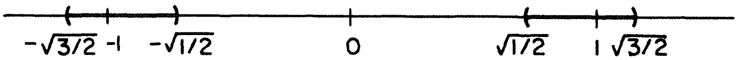
(ii) $[2, 4]$.



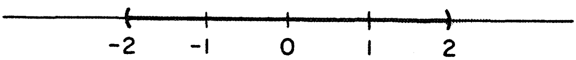
(iii) $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.



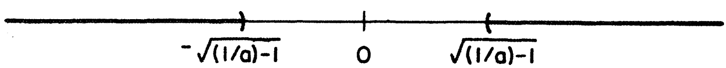
(iv) $(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{1/2}) \cup (\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2})$.



(v) $(-2, 2)$.



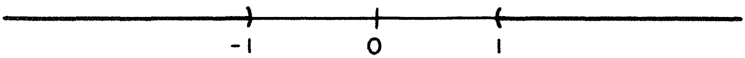
(vi) $\varnothing$ si $a \leqslant 0$;



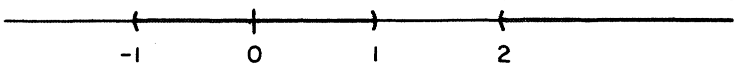
$\mathbf{R}$ si $a \geqslant 1$;

$(-\infty, -\sqrt{(1/a) - 1}] \cup [\sqrt{(1/a) - 1}, \infty)$ si $0 < a < 1$.

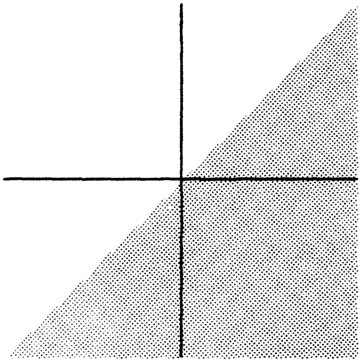
(vii) $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.



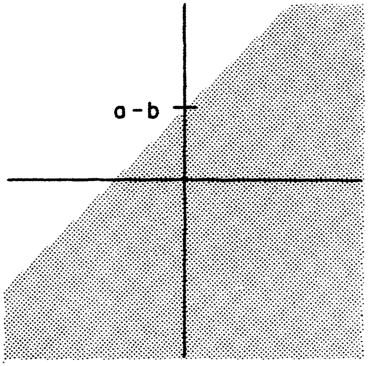
(viii) $(-1, 1) \cup (2, \infty)$.



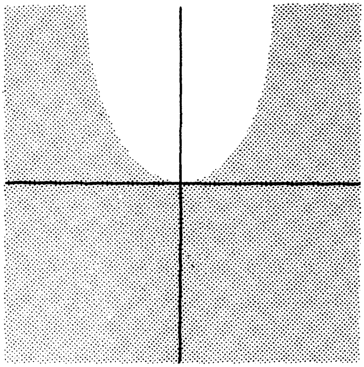
2. (i)



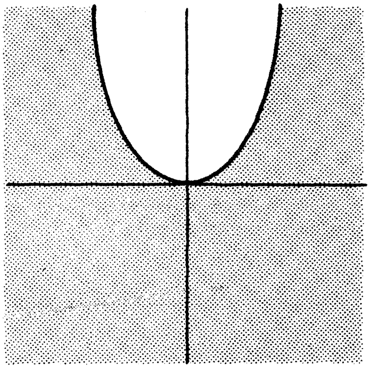
(ii)



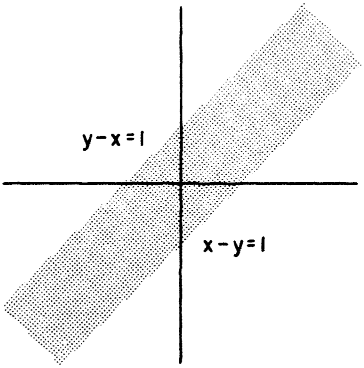
(iii)



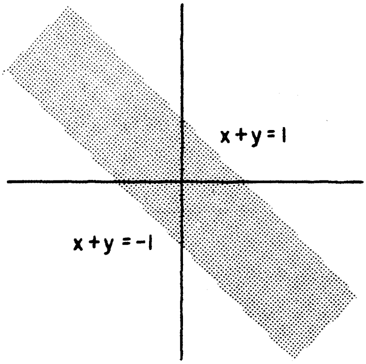
(iv)



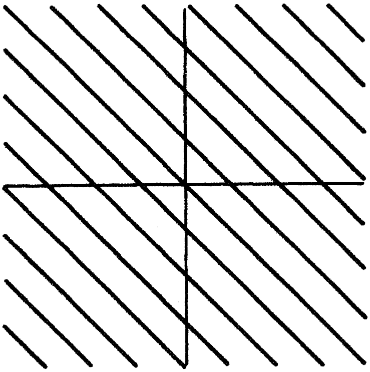
(v)



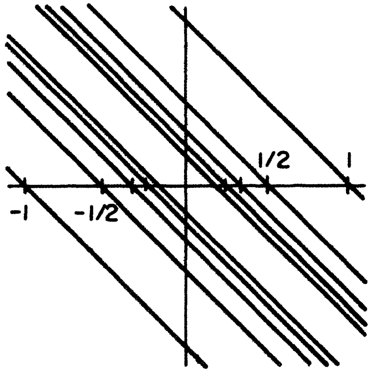
(vi)



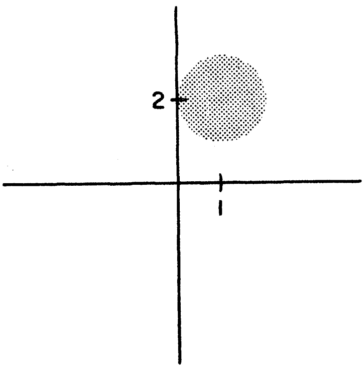
(vii)



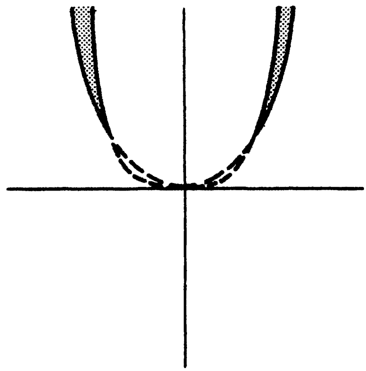
(viii)



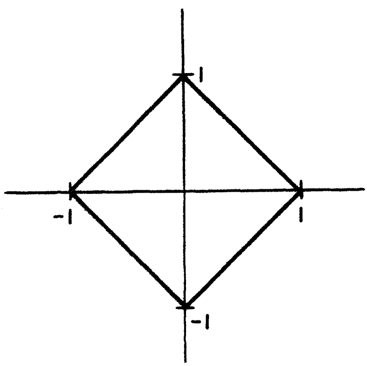
(ix)



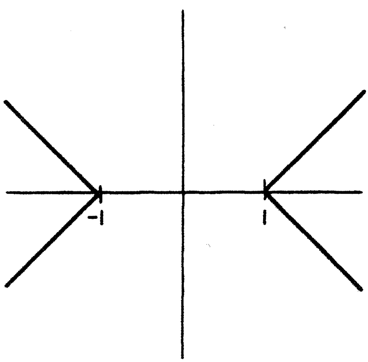
(x)



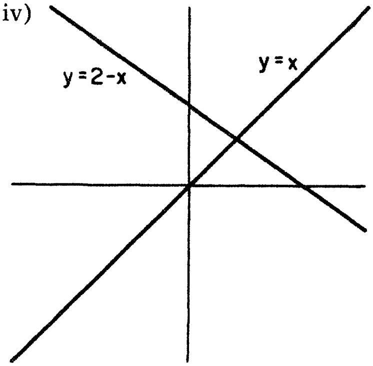
3. (i)



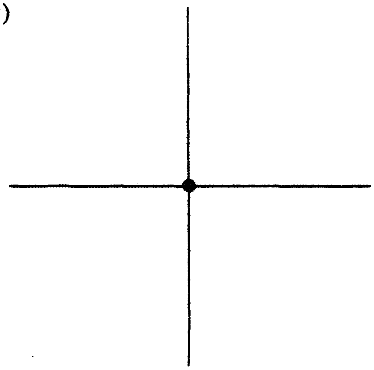
(ii)



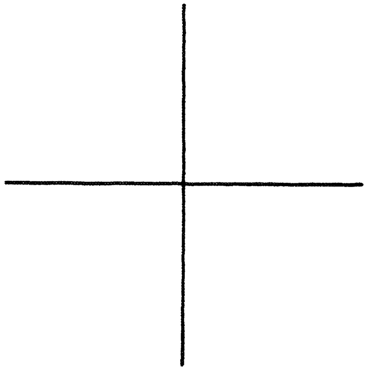
(iii), (iv)



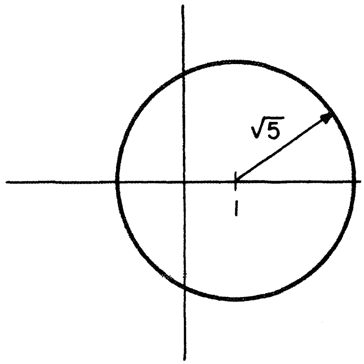
(v)



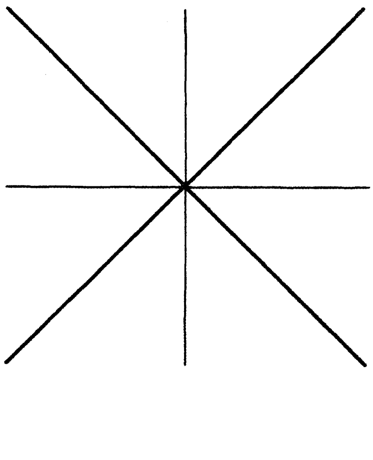
(vi)



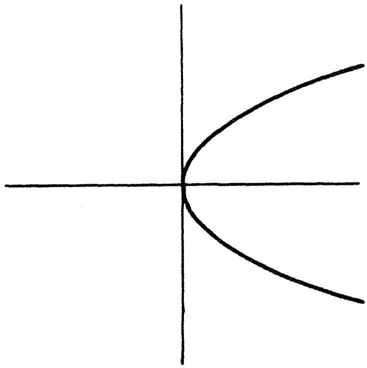
(vii) $x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 - 1$



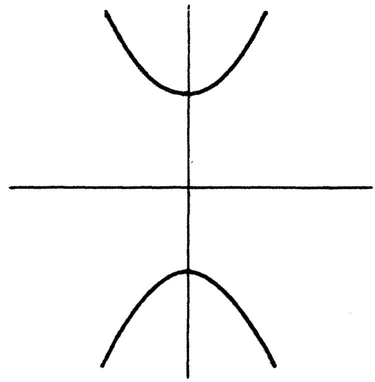
(viii)



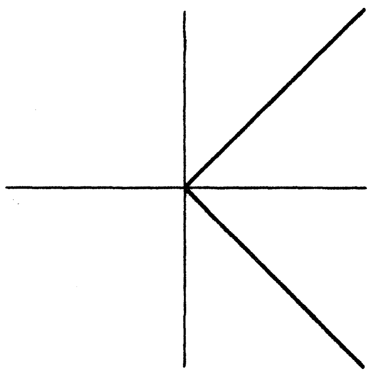
4. (i)



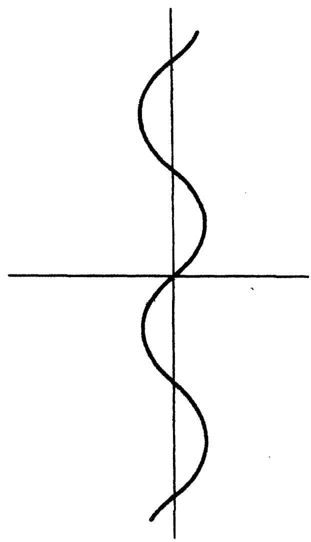
(ii)



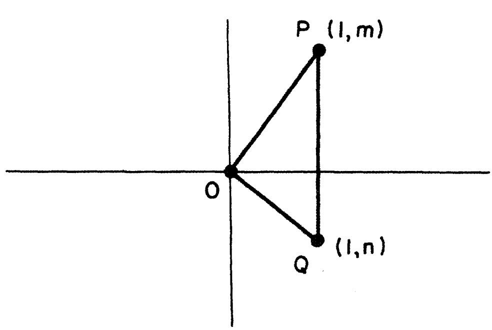
(iii)



(iv)



7. (a) El ángulo POQ es recto si y sólo si $(PQ)^2 = (PO)^2 + (OQ)^2$.



Significa esto que

$$(m - n)^2 = m^2 + 1 + n^2 + 1,$$

lo cual equivale a $-2mn = 2$, o $mn = -1$. Esto demuestra el resultado cuando $b = c = 0$. El caso general se deduce de este caso particular, ya que la perpendicularidad depende sólo de la pendiente.

(b) Si $B \neq 0$ y $B' \neq 0$, estas rectas son las gráficas de

$$f(x) = (-A/B)x \ - C/A,$$
$$g(x) = (-A'/B')x - C/A;$$

de modo que, según la parte (a), las rectas son perpendiculares si y sólo si

$$\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1,$$

lo que equivale a $AA' + BB' = 0$. Si $B = 0$ (y en consecuencia $A \neq 0$), entonces la primera recta es vertical, de modo que la segunda le es perpendicular si y sólo si $A' = 0$, lo cual ocurre exactamente cuando $AA' + BB' = 0$. Análogamente para el caso $B' = 0$.

8. (a) Esta desigualdad tiene lugar si y sólo si se cumple la que se obtiene al elevar al cuadrado ambos miembros,

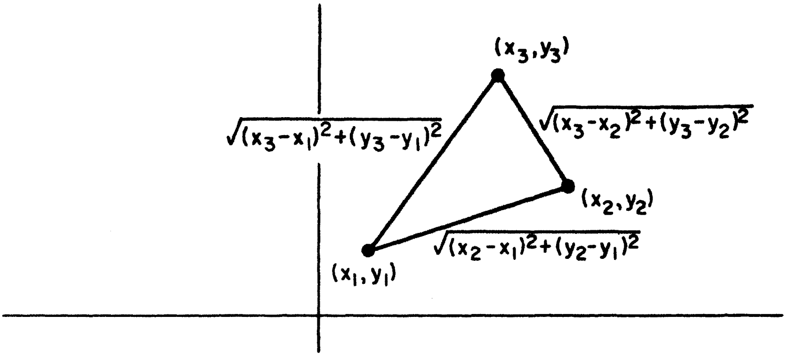
$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

lo cual, como puede observarse, es equivalente a la desigualdad de Schwartz.

(b) En la parte (a), sustitúyase

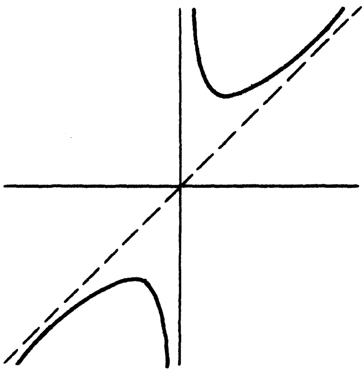
x_1	por	$x_2 - x_1$,
x_2	por	$y_2 - y_1$,
y_1	por	$x_3 - x_2$,
y_2	por	$y_3 - y_2$.

Geométricamente, esta desigualdad dice que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. (Obsérvese que la información adicional relativa a la desigualdad de Schwartz aportada en el problema 1-18(d) indica que el signo $\leqslant$ puede ser sustituido por $<$ en la desigualdad triangular excepto cuando (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) están sobre una recta.)

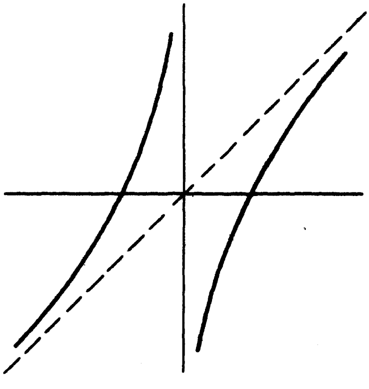


9. (En las figuras que vienen a continuación no queda señalado ningún punto particular, ya que fueron trazadas mediante el método expuesto en el Capítulo 11 y no marcando puntos.)

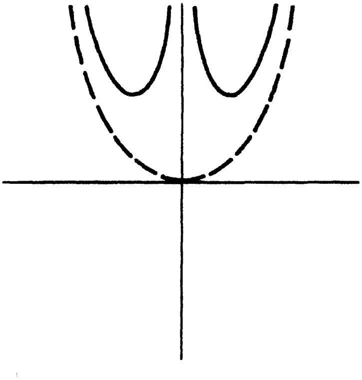
(i) Esta función es impar.



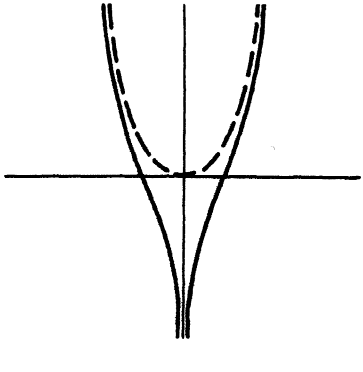
(ii) Esta función es impar.



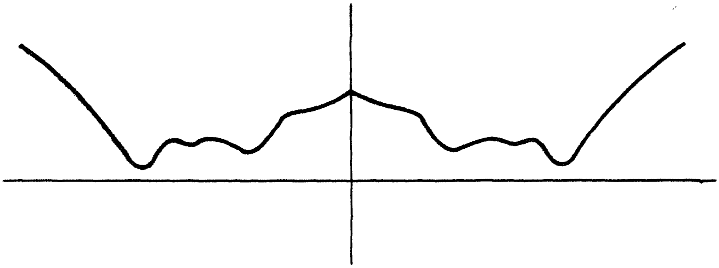
(iii) Esta función es par.



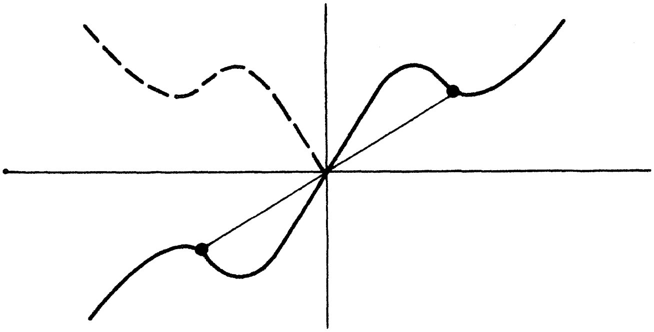
(iv) Esta función es par.



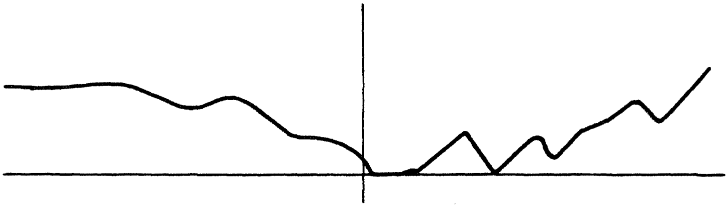
10. (i) La gráfica de f es simétrica respecto al eje vertical.



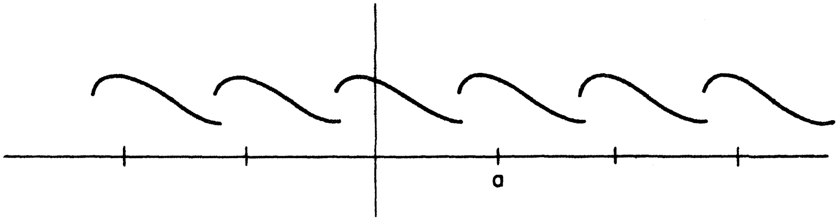
(ii) La gráfica de f es simétrica respecto al origen. De modo equivalente, la parte de la gráfica que queda a la izquierda del eje vertical se obtiene por simetría, primero respecto al eje vertical y después respecto al eje horizontal.



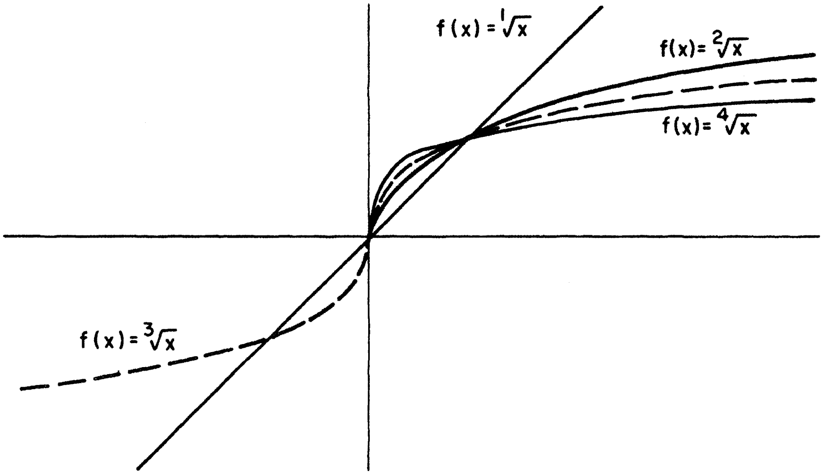
(iii) La gráfica de f queda por encima o sobre el eje horizontal.



(iv) La gráfica de f repite una y otra vez la parte comprendida entre 0 y a.

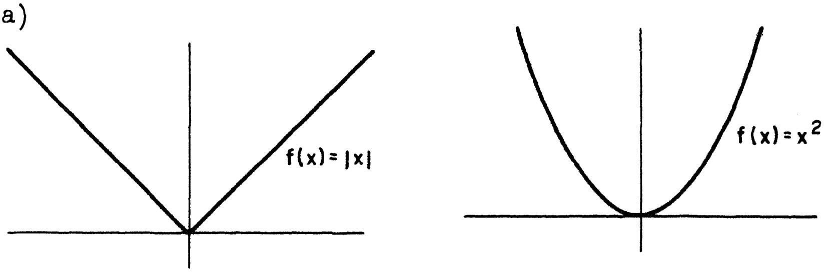


11. Cuando n es impar, el dominio de f es $\mathbf{R}$, pero cuando n es par, el dominio de f es $[0, \infty)$.

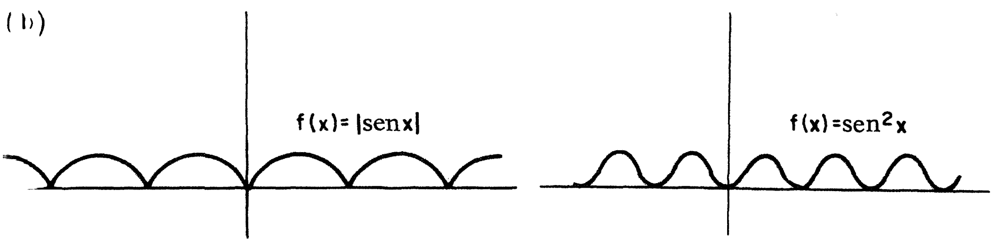


12. Las gráficas de $f(x) = |x|$ y de $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ contienen «esquinas».

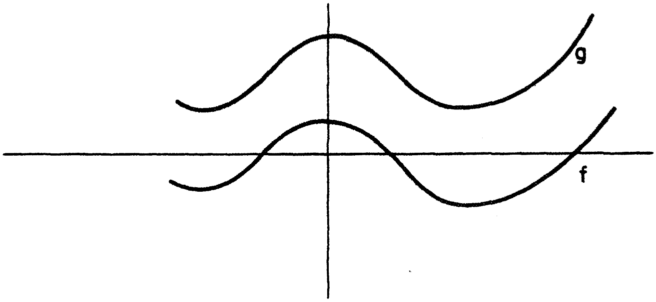
(a)



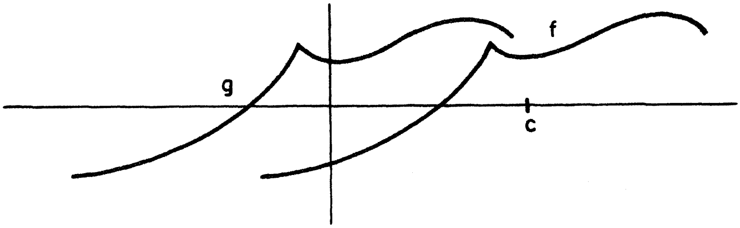
(b)



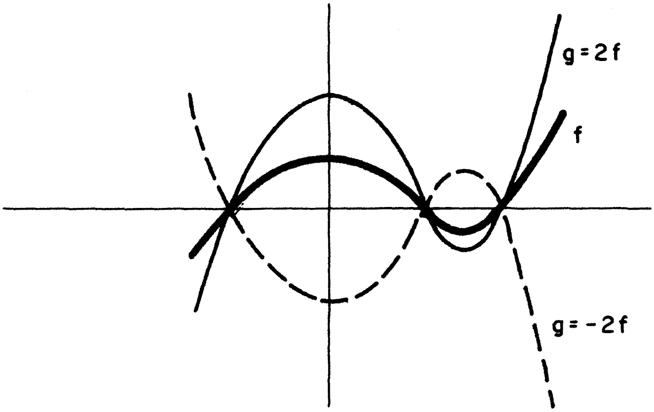
13. (i) La gráfica de g es la gráfica de f trasladada hacia arriba en c unidades.



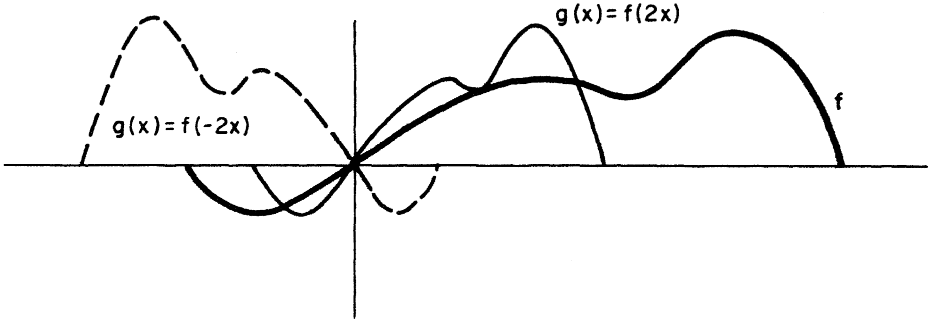
(ii) La gráfica de g es la gráfica de f trasladada c unidades hacia la *izquierda* (si $c > 0$).



(iii) La altura de la gráfica de f es multiplicada invariablemente por el factor c. Si $c = 0$, esto significa que $g = 0$; si $c > 0$, las distancias al eje horizontal son afectadas por el factor, pero conservan el mismo sentido; si $c < 0$ se invierten los sentidos.

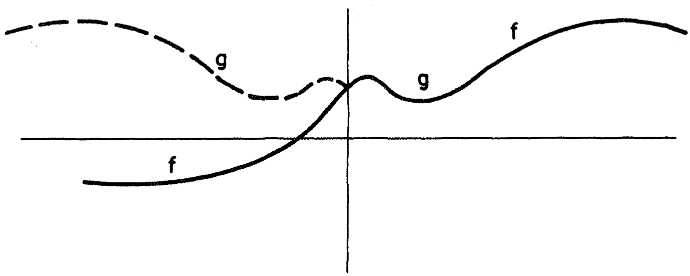


(iv) La gráfica de f resulta contraída (*) mediante el factor c si $c > 0$; si $c < 0$, la contracción se combina con una simetría respecto al eje vertical. Si $c = 0$, entonces g es una función constante, $g(x) = f(0)$.

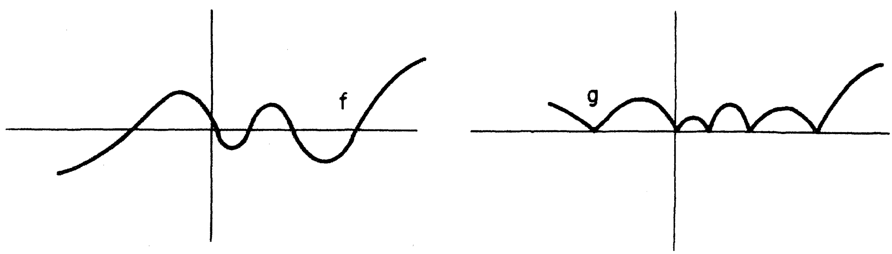


(v) «Todo lo que ocurre lejos de 0, ocurre también cerca, y viceversa», lo cual queda ampliamente ilustrado con la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

(vi) La gráfica de g consiste en la parte de la gráfica a la derecha del eje vertical, junto con la simétrica de dicha parte respecto al mismo eje vertical.

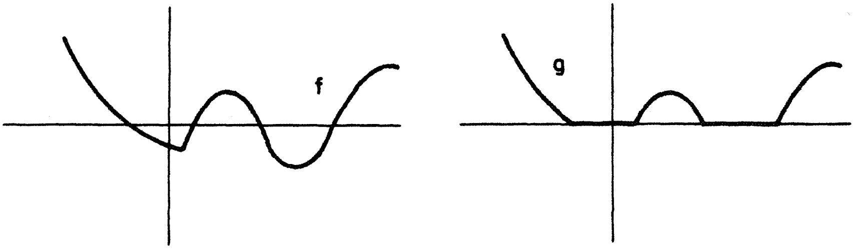


(vii) La gráfica de g se obtiene levantando hacia arriba todas aquellas partes de la gráfica de f que quedan por debajo del eje horizontal.

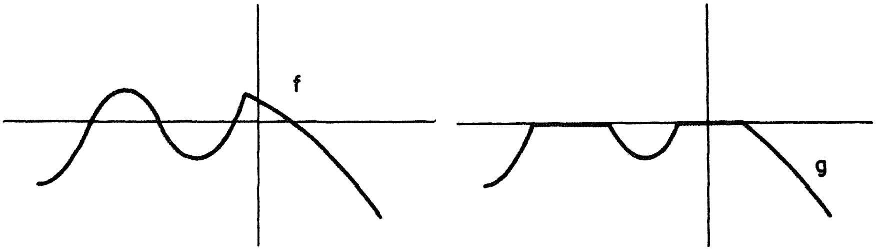


(*) *Nota del traductor.* — El autor supone que es $|c| > 1$.

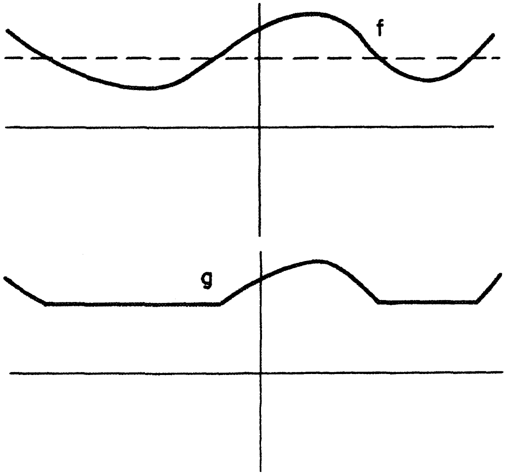
(viii) La gráfica de g se obtiene «recortando» aquellas partes de la gráfica de f que se encuentran por debajo del eje horizontal.



(ix) La gráfica de g se obtiene «recortando» las partes de la gráfica de f que quedan por encima del eje horizontal.



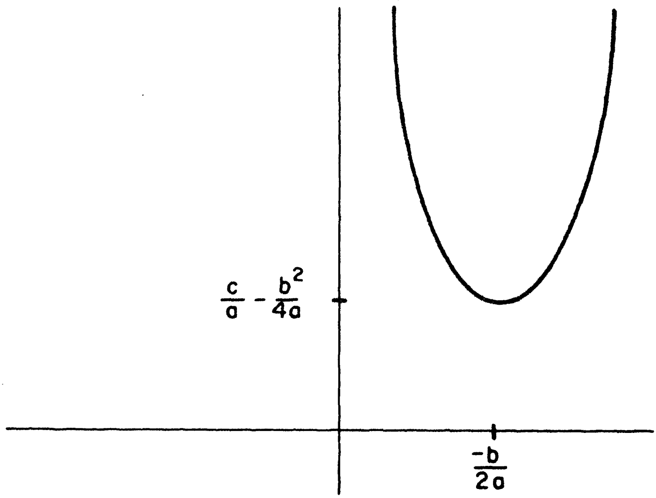
(x) La gráfica de g se obtiene «recortando» la parte de la gráfica de f que queda por debajo de la horizontal de altura 1 sobre el eje.



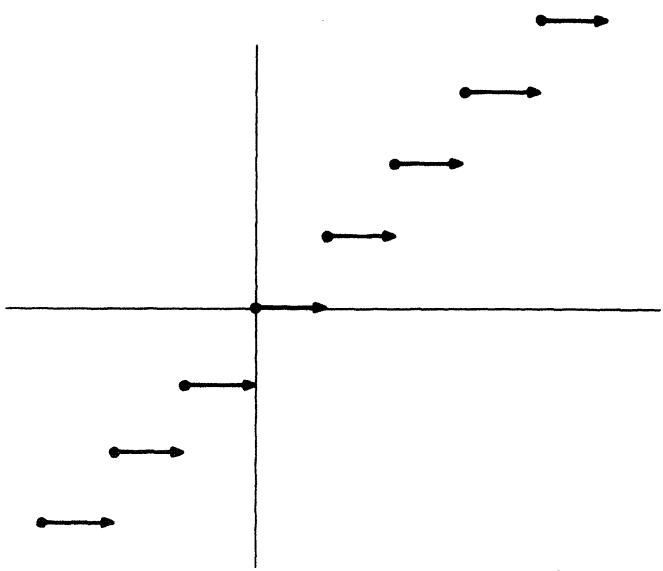
14. Al ser

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right)\right],$$

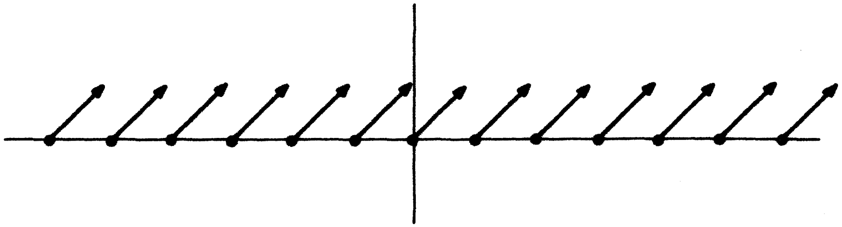
la forma general de la gráfica es la que se ve en la figura adjunta.



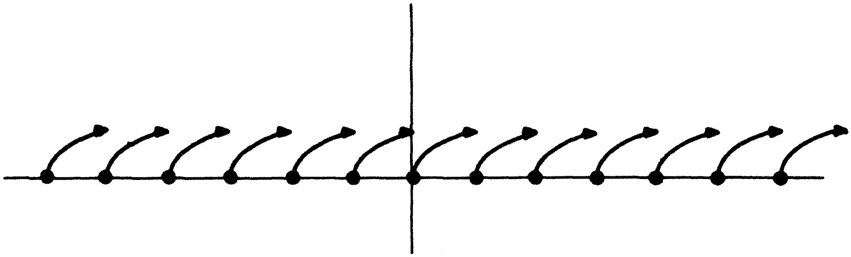
15. (i)



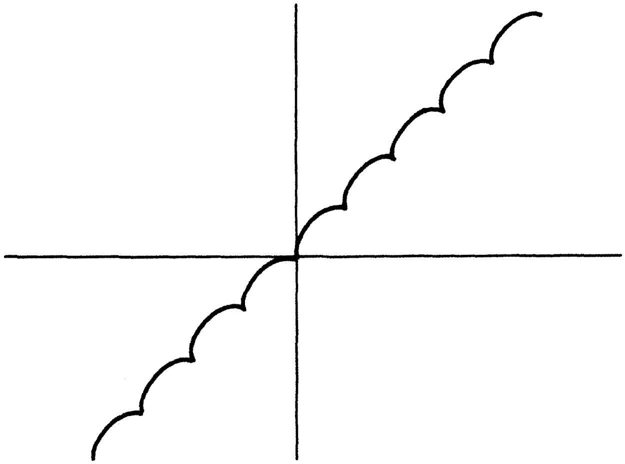
(ii)



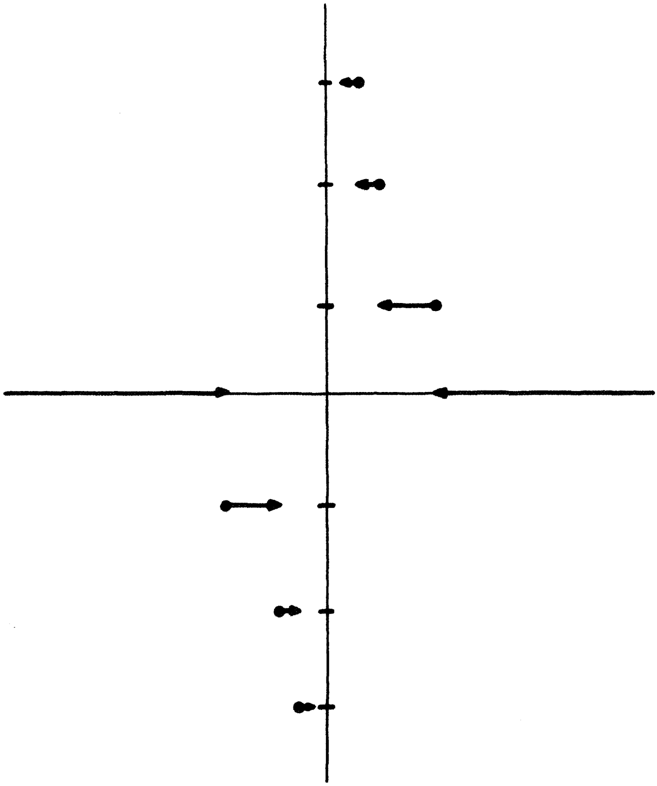
(iii)



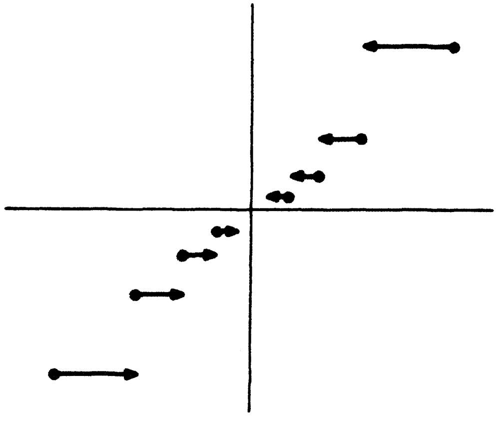
(iv)



(v)

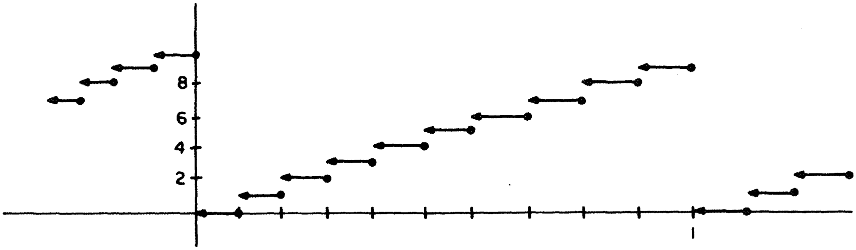


(vi) Obsérvese que el dominio de f es $\{x\colon\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ y } x \neq 0\}$.



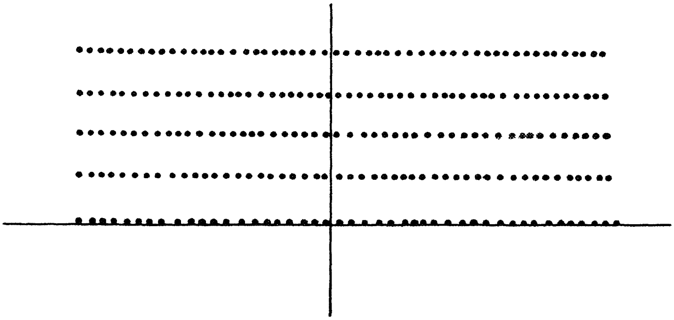
16. Véanse las páginas 622 y 627 del texto.

17. (i) Obsérvese que se han utilizado escalas distintas sobre los dos ejes.

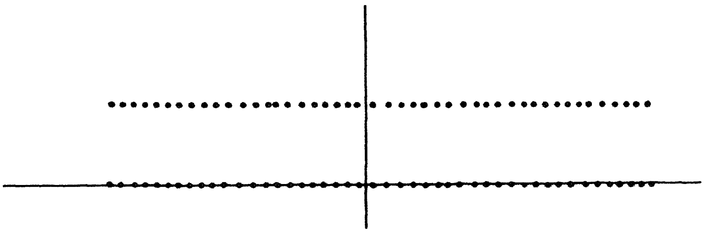


(ii) La gráfica de f es semejante a la de la parte (i), salvo que existen diez conjuntos de diez escalones entre n y $n + 1$.

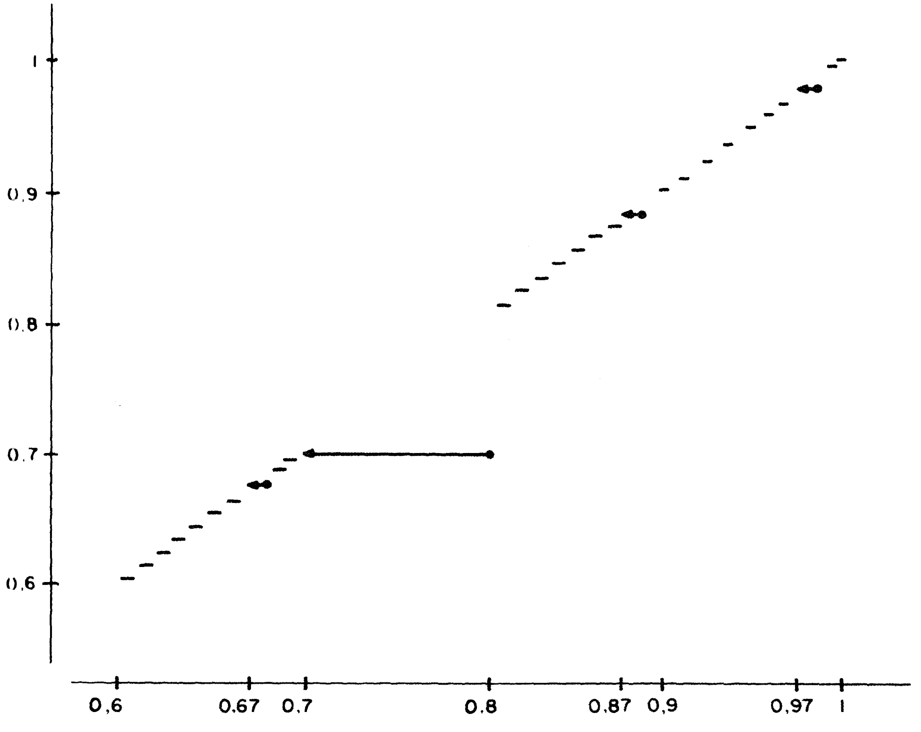
(iii) La gráfica de f contiene puntos en cada intervalo de cada una de las horizontales a distancias 0, 1, 2, ..., por encima del eje horizontal.



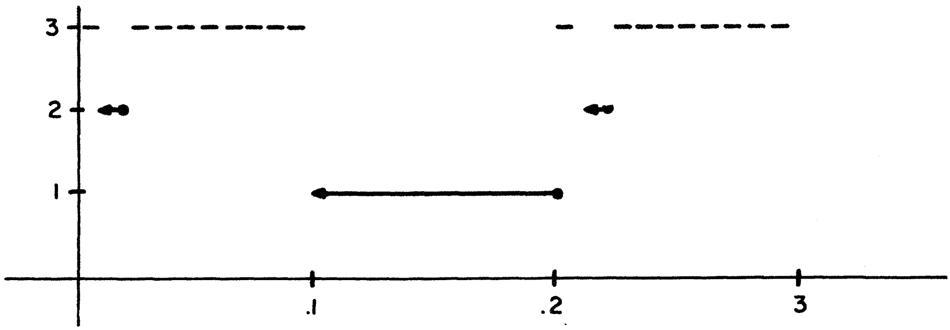
(iv) La gráfica de f contiene puntos en cada intervalo del eje horizontal y de la horizontal a distancia 1 por encima del eje.



(v) La figura adjunta presenta una imagen («a grosso modo») de la parte de la gráfica de f que corresponde al intervalo [6/10, 1].



(vi) En la figura de la página siguiente puede verse una imagen («a grosso modo») de la gráfica de f. Obsérvese que se han utilizado escalas distintas sobre los dos ejes.



18. Véase la página 111 del texto.

20. (a) La primera parte es un cálculo directo. Según el problema 1-17, el mínimo de estos números es

$$d^2 + c^2 - \frac{(-2md - 2c)^2}{4(m^2+1)} = \frac{4m^2d^2 + 4d^2 + 4m^2c^2 + 4c^2 - (4m^2d^2 + 8mcd + 4c^2)}{4(m^2+1)}$$

$$= \frac{d^2 + m^2c^2 - 2mcd}{m^2+1} = \frac{(cm-d)^2}{m^2+1}.$$

(b) La distancia de (c, d) a la gráfica de f es la misma que la distancia de $(c, d-b)$ a la gráfica de $g(x) = mx$. Según la parte (a), ésta es

$$\frac{|cm - d + b|}{m^2+1}.$$

21. (a) x' = distancia de (x, y) a la gráfica de $f(x) = -x$ si (x, y) queda por encima de esta gráfica (es decir, si $x + y \geqslant 0$), y la negativa de esta distancia si $x + y \leqslant 0$.

y' = distancia de (x, y) a la gráfica de $f(x) = x$ si (x, y) queda por encima de esta gráfica (es decir, si $x - y < 0$), y la negativa de esta cuando $x - y \geqslant 0$.

Según el problema 20, estas distancias vienen dadas por

$$\frac{|-x-y|}{\sqrt{2}} = \left|\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right|,$$

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \left|\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right|,$$

de donde se deducen las fórmulas deseadas.

(b) Al ser

$$\frac{x'}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2},$$

$$\frac{y'}{\sqrt{2}} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2},$$

tenemos $(x'/\sqrt{2})^2 - (y'/\sqrt{2})^2 = 1$ si y sólo si

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2}\right) \\ &= xy. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

1. (i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$

   (iii) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{27 - 8}{3 - 2} = 19.$

   (v) $\lim_{y \to x} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \lim_{x \to y} \frac{y^n - x^n}{y - x} = ny^{n-1}.$

2. (iv) Póngase $\delta = \epsilon$, puesto que $|x/(1 + \operatorname{sen}^2 x)| \leqslant |x|$.

   (vi) Si $\epsilon > 1$, póngase $\delta = 1$. Entonces $|x - 1| < \delta$ implica que $0 < x < 2$, con lo que $0 < \sqrt{x} < 2$ y $|\sqrt{x} - 1| < 1$. Si $\epsilon < 1$, entonces $(1 - \epsilon)^2 < x < (1 + \epsilon)^2$ implica que $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$, de modo que hasta elegir δ tal que $(1 - \epsilon)^2 \leqslant 1 - \delta$ y $1 + \delta \leqslant (1 + \epsilon)^2$. Podemos elegir, pues, $\delta = 2\epsilon - \epsilon^2$.

3. (i), (ii), (iii) Para todos los números a que no sean enteros.

   (iv) Para todo a.

   (v) Para todo a con $a \neq 0$ y $a \neq 1/n$, siendo n un entero cualquiera.

   (vi) Para todo a con $|a| < 1$ y $a \neq 1/n$ siendo n un entero cualquiera.

4. (a) (i) Para todo a que no sea de la forma $n + k/10$ con n y k enteros.

   (ii) Para todo a que no sea de la forma $n + k/100$ con n y k enteros.

   (iii), (iv) Para ningún a.

   (v) Para todos los números a cuyo desarrollo decimal no termine en 7999... .

   (vi) Para todos los números a cuyo desarrollo decimal contenga por lo menos un 1.

(b) Las respuestas son las mismas que para la parte (a) (si bien la descripción de los números en términos de su nuevo «desarrollo decimal» puede ser distinta).

5. (ii) Debemos tener

$$|f(x)-2|<\min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|4|+1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x)-4|<\frac{\epsilon}{2(|2|+1)},$$

de modo que hace falta que sea

$$0<|x-2|<\min\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{[\min(1, \epsilon/10)]^2}{9}\right)+\min(1, \epsilon/10), [\min(1, \epsilon/6)]^2\right) = \delta.$$

(iv) Debemos tener

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{4}\right|<\frac{\epsilon}{2(|2|+1)} \quad \text{y} \quad |f(x)-2|<\min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|1/4|+1)}\right),$$

de modo que debe ser

$$0<|x-2|<\min\left(\left[\min\left(2, \frac{8\epsilon}{2(|2|+1)}\right)\right]^2, \operatorname{sen}^2\left(\frac{[\min(1, 2\epsilon/5)]^2}{9}\right) + \min(1, 2\epsilon/5)\right) = \delta.$$

6. Sea $f(x)=\sqrt{|x|}$ con $a=0$ y $\ell=0$. Entonces para $\epsilon<1$ tenemos $|\sqrt{|x|}-0|<\epsilon$ cuando $0<|x-0|<\epsilon^2$; pero si $0<|x-0|<\epsilon^2/2$, no sigue que $|\sqrt{|x|}-0|<\epsilon/2$ (debemos poner $0<|x-0|<(\epsilon/2)^2$).

7. (a) Sí. Por ejemplo, si $g=1-f$, entonces $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ existe aun en el caso de no existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (y en consecuencia tampoco $\lim\limits_{x\to a} g(x)$); y si $g=1/f$ donde $f(x)\neq 0$ para todo $x\neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ existe aun cuando no existan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (por ejemplo, si $f(x)=1/(x-a)$ para $x\neq 0$, y $g(x)=x-a$).

(b) Sí, puesto que $g=(f+g)-f$.

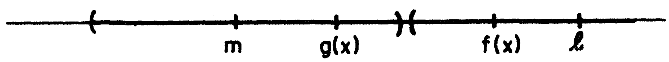
(c) No. (Esto es sólo otro modo de enunciar la parte (b).)

(d) No. (El razonamiento análogo al de la parte (b), de que $g=(f\cdot g)/f$ no será aplicable si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, y éste es precisamente el caso en que se puede encontrar un contraejemplo. Por ejemplo, sea $f(x)=x-a$

y sea $g(x) = 0$ para x racional y 1 para x irracional. Entonces $\lim_{x \to a} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)\,g(x) = 0$, ya que $|f(x)\,g(x) - 0| \leqslant |f(x)|$.

10. Intuitivamente esto es verdad, ya que basta considerar las x que satisfacen $0 < |x - a| < \delta'$, donde podemos elegir $\delta' < \delta$. En efecto,si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, y $\epsilon > 0$, existe un δ' tal que si $0 < |x - a| < \delta'$, entonces $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pero existe también un $\delta' < \delta$ con esta propiedad (a saber, $\min(\delta', \delta)$). Al ser $f(x) = g(x)$ para todo x con $0 < |x - a| < \delta$, tenemos también $f(x) = g(x)$ para todo x con $0 < |x - a| < \delta'$, de modo que la conclusión $|f(x) - \ell| < \epsilon$ puede expresarse igualmente en la forma $|g(x) - \ell| < \epsilon$. Esto demuestra que $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

11. (a) Se ve intuitivamente que $f(x)$ no puede aproximarse a un número mayor que $\lim_{x \to a} g(x)$, ya que $f(x) \leqslant g(x)$ y $g(x)$ está próximo a $\lim_{x \to a} g(x)$. Una demostración rigurosa es por reducción al absurdo. Supóngase que $\ell = \lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x) = m$. Sea $\epsilon = \ell - m > 0$. Existe entonces un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|\ell - f(x)| < \epsilon/2$ y $|m - g(x)| < \epsilon/2$.



Así pues, para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos

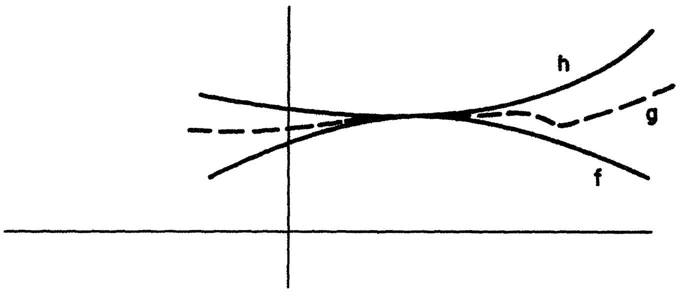
$$g(x) < m + \frac{\epsilon}{2} = \ell - \frac{\epsilon}{2} < f(x),$$

contrariamente a la hipótesis.

(b) Basta suponer que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$, para algún $\delta > 0$.

(c) No. Sea, por ejemplo, $f(x) = 0$ y sea $g(x) = |x|$ para $x \neq 0$, y $g(0) = 1$. Entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$.

12. De modo intuitivo se ve que g queda comprimida entre f y h, funciones que se aproximan a un mismo número:



Sea $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|h(x) - \ell| < \epsilon$ y $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Así pues, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\ell - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \epsilon,$$

de modo que $|g(x) - \ell| < \epsilon$.

13 (a) Deberíamos tener

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(bx)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{bf(bx)}{bx} = b \lim_{x \to 0} \frac{f(bx)}{bx} = b \lim_{y \to 0} \frac{f(y)}{y} = b\ell.$$

La penúltima igualdad puede justificarse como sigue. Si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |y| < \delta$, entonces $|f(y)/y| < \epsilon$. Tenemos pues que si $0 < |x| < \epsilon / |b|$, entonces $0 < |bx| < \epsilon$, de modo que $|f(bx)/bx| < \epsilon$.

(b) En este caso, $\lim_{x \to 0} f(bx)/x = \lim_{x \to 0} f(0)/x$ no existe, a menos que $f(0) = 0$.

(c) Por la parte (a) se ve $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} 2x)/x = 2 \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x$. Podemos también aplicar el siguiente cálculo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \cos x \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2.$$

(Por supuesto que este método no será aplicable en general para $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} \alpha x)/x$.)

14. (a) Intuitivamente, si $f(x)$ está cerca de ℓ, entonces $|f(x)|$ está cerca de $|\ell|$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

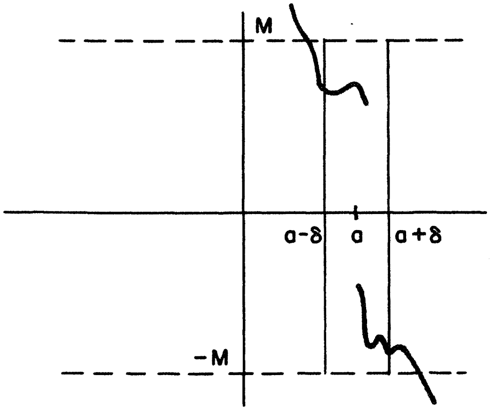
$|f(x)-\ell|<\epsilon$. Pero $||f(x)|-|\ell|| \leqslant |f(x)-\ell|<\epsilon$ (según el Problema 1-12 (vi)).

(b) Esto es consecuencia de (a) y del teorema 2, ya que

$$\max(f, g)=\frac{f+g+|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

16. Esto significa que f es acotada en un intervalo alrededor de a.

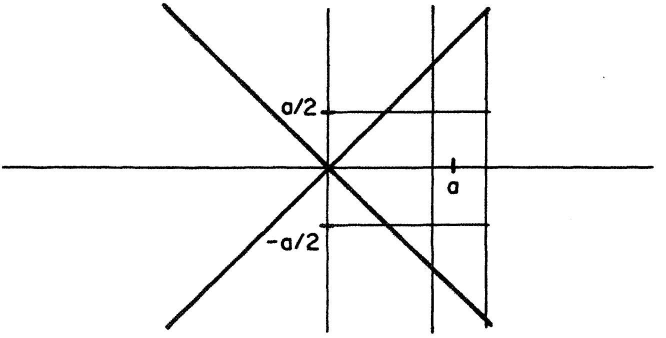


Elíjase $\delta>0$ de modo que $|f(x)-\ell|<1$ para $0<|x-a|<\delta$ (estamos tomando $\epsilon=1$). Entonces $\ell-1<f(x)<\ell+1$, de modo que podemos hacer $M=\max(|\ell+1|, |\ell-1|)$.

17. Para cualquier $\delta>0$ tenemos $f(x)=0$ para algún x que satisface $0<|x-a|<\delta$ (a saber, x irracional con $0<|x-a|<\delta$) y también $f(x)=1$ para algún x que satisface $0<|x-a|<\delta$ (a saber, x racional con $0<|x-a|<\delta$). Significa esto que no podemos tener $|f(x)-\ell|<1/2$, tenga ℓ el valor que tenga. (Hay aquí un poco de trampa; véase el Problema 8-5.)

18. Considérese, para mayor sencillez, el caso $a>0$. La idea básica es que al estar $f(x)$ cerca de a para todos los racionales x que están cerca de a, y al estar $f(x)$ cerca de $-a$ para todos los irracionales x que están cerca de a, no podemos tener a $f(x)$ próximo a ningún número fijo. Para conseguir que esta idea sea aplicable, observemos que para cualquier $\delta>0$ existen x con $0<|x-a|<\delta$ y $f(x)>a/2$, así como x con $0<|x-a|<\delta$ y $f(x)<-a/2$. Puesto que la distancia entre $a/2$ y $-a/2$ es a, esto significa

que no podemos tener $|f(x) - \ell| < a$ para todos estos x, cualquiera que sea el valor de ℓ.



19. (a) Es consecuencia de (b), ya que $|\operatorname{sen} 1/x| \leqslant 1$ para todo $x \,(\neq 0)$.

    (b) Si $\delta > 0$ es tal que $|g(x)| < \epsilon/M$ para todo x con $0 < |x| < \delta$, entonces $|g(x)\, h(x)| < \epsilon$ para todos estos x.

20. Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe, está claro entonces que $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ no existirá cuando $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no exista (esto fue objeto del Problema 7(b) y (c)). Por otra parte, si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, elíjase $g = -f$; entonces $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe, pero $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ sí existe.

21. (a) Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\, g(x)$ existiera, existiría también entonces $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)\, g(x)/f(x)$.

    (b) Evidentemente, si existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\, g(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

    (c) En el caso (1) de la indicación está claro que no podemos tener $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, así que por lo supuesto, el límite no existe en absoluto. Sea $g = 1/f$. Al *no* ser verdad que $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = \infty$, se sigue que si $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq 0$. Pero esto implicaría que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe, con lo que $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe. Por otra parte, está claro que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\, g(x)$ existe. En el caso (2), elíjase x_n según se indica. Defínase $g(x) = 0$ para $x \neq x_n$, y $g(x) = 1$ para $x = x_n$. Entonces $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

22. Dado $\epsilon > 0$, elíjase n con $1/n < \epsilon$ y hágase δ igual a la distancia mínima desde a a todos los puntos de $A_1, \ldots, A_n$ (excepto a sí mismo en el caso en que a sea uno de estos puntos). Entonces $0 < |x - a| < \delta$ implica que x no está en $A_1, \ldots, A_n$, de modo que $f(x) = 0$ o $1/m$ para $m > n$, o sea que $|f(x)| < \epsilon$.

24. (a) Aunque sea verdad que $\lim_{x\to 1} 1/x = 1$, *no* es verdad que para *todo* $\delta > 0$ exista un $\epsilon > 0$ con $|1/x - 1| < \epsilon$ para $0 < |x - 1| < \delta$. En efecto, si $\delta = 1$, no existe un tal ϵ, ya que $1/x$ puede ser tan grande como se quiera, siendo $0 < |x - 1| < 1$.

    Además, *cualquier* función f acotada satisface automáticamente la condición, tanto si es $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ como si no.

    (b) Si f es una función constante $f(x) = c$, esta condición no se cumple, puesto que $|f(x) - c| < 1$ no implica ciertamente que $0 < |x - a| < \delta$, para algún δ.

    Además, la función $f(x) = x$, satisface esta condición cualesquiera que sean a y ℓ.

25. (i), (ii), (iii), (iv) Los dos límites laterales existen para todo a.

    (v) Los dos límites laterales existen para $a \neq 0$, y ninguno de los dos existe para $a = 0$.

    (vi) Los dos límites laterales existen para todo a con $|a| < 1$; además existen, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

26. (a) (i), (ii) Los dos límites existen para todo a.

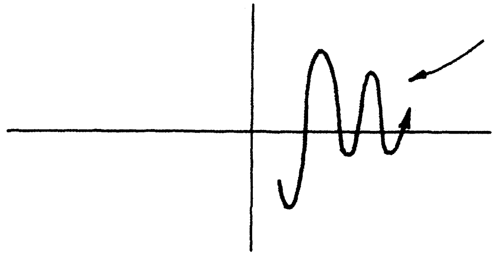
    (iii), (iv) Ninguno de los dos límites laterales existe, cualquiera que sea a.

    (v) Los dos límites laterales existen para todo a.

    (vi) Los dos límites laterales existen para todos los a cuyo desarrollo decimal contenga por lo menos un 1; además, el límite por la derecha existe para todo a cuyo desarrollo decimal no contenga ningún 1, pero que termine en 0999... .

    (b) Las respuestas son las mismas que para la parte (a).

29.



Sea $\ell = \lim_{x \to a^-} f(x)$ y $m = \lim_{x \to a^+} f(x)$. Al ser $m - \ell > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \frac{m-\ell}{2} \quad \text{cuando} \quad a - \delta < x < a,$$

$$|f(y) - m| < \frac{m-\ell}{2} \quad \text{cuando} \quad a < y < a + \delta.$$

Esto implica que

$$f(x) < \ell + \frac{m-\ell}{2} = m - \frac{\ell - m}{2} < f(y).$$

La recíproca no es cierta, como lo demuestra $f(t) = t$ y cualquier a. Se concluye solamente que $\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x)$.

30. Suponemos, naturalmente, que $a_n \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Si $x \neq 0$, entonces

$$\frac{a_n x^m + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \dots + \dfrac{a_0}{x^n}}{\dfrac{b_m}{x^{n-m}} + \dots + \dfrac{b_0}{x^n}} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si $m < n$, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = a_n$, pero $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. Esto implica que $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x)$ no existe (de otro modo tendríamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = [\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x)] \cdot [\lim_{x \to \infty} g(x)] = 0).$$

Si $m \geqslant n$, ponemos

$$\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{\dfrac{a_n}{x^{m-n}} + \dots + \dfrac{a_0}{x^m}}{b_m + \dots + \dfrac{b_0}{x^m}} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ si $m > n$, y a_n si $m = n$, mientras que $\lim_{x\to\infty} g(x) = b_m$. Así pues, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ si $m > n$, y a_n/b_m si $m = n$.

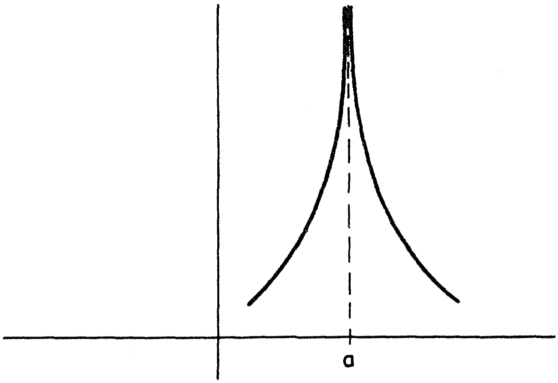
32. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe algún N tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ para $x < N$.

(a) La respuesta es la misma que cuando $x \to \infty$ (Problema 30).

(b) Si $\ell = \lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe algún N tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ para $x > N$. Si es ahora $x < -N$, entonces $-x > N$, con lo que $|f(-x) - \ell| < \epsilon$. Así pues, $\lim_{x\to -\infty} f(-x) = \ell$.

(c) Si $\ell = \lim_{x\to -\infty} f(x)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe algún N tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ para $x < N$, y podemos suponer que es $N < 0$. Ahora si $1/N < x < 0$, entonces $1/x < N$, con lo que $|f(1/x) - \ell| < \epsilon$.

33.



(a) Dado $N > 0$, pongamos $\delta = 1/\sqrt{N}$. Entonces $0 < |x - 3| < \delta$ implica que $(x-3)^2 < 1/N$, con lo que $1/(x-3)^2 > N$.

(b) Dado $N > 0$, con lo que $1/N > 0$, elijamos $\delta > 0$ tal que $|g(x)| < \epsilon/N$ para $0 < |x - a| < \delta$. Entonces $0 < |x - a| < \delta$ implica que

$$|f(x)/g(x)| > \epsilon \cdot (N/\epsilon) = N.$$

34. (a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ significa que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $a < x < a + \delta$, entonces $f(x) > N$.

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ significa que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $a - \delta < x < a$, entonces $f(x) > N$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que para todo N existe un M tal que, para todo x, si $x > M$, entonces $f(x) > N$.

Se puede definir también

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

(b) Dado $N > 0$, elíjase $\delta = 1/N$. Si $0 < x < \delta$, entonces $1/x > N$.

(c) Si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$, entonces para todo N existe un M tal que $f(1/x) > N$ para $x > M$. Elíjase $M > 0$. Si $0 < x < 1/M$, entonces $x > M$, con lo que $f(x) > N$. Así pues, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. La demostración de lo recíproco se hace de modo análogo.

CAPÍTULO 6

1. (ii) Para ningún F, ya que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe.

   (iv) Para ningún F, ya que $F(a)$ tendría que ser 0 para los a irracionales y entonces F no podría ser continua en a si a es racional.

2. Problema 4-15:

   (i), (ii), (iii) En todos los puntos excepto en los enteros.

   (iv) En todos los puntos.

   (v) En todos los puntos excepto en 0 y en $1/n$ para n entero.

   (vi) En todos los puntos de $(-1, 1)$ excepto en 0 (donde no está definida) y en $1/n$ para n entero.

   Problema 4-17:

   (i) En todos los puntos que no sean de la forma $n + k/10$ con n y k enteros.

   (ii) En todos los puntos que no sean de la forma $n + k/100$ con n y k enteros.

   (iii), (iv) En ningún punto.

   (v) En todos los puntos cuyo desarrollo decimal no termine en 7999... .

   (vi) En todos los puntos cuyo desarrollo decimal contenga por lo menos un 1.

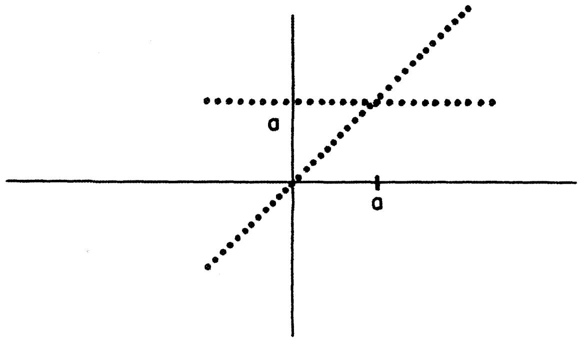
3. (a) Está claro que $\lim_{h\to 0} f(h) = 0$, ya que $|h| < \delta$ implica que $|f(h) - f(0)| = |f(h)| < \delta$.

   (b) Póngase $f(x) = 0$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

   (c) Obsérvese que $|f(0)| \leqslant |g(0)| = 0$, con lo que $f(0) = 0$. Al ser g continua en 0, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|g(h) - g(0)| = |g(h)| < \epsilon$ para $|h| < \delta$. Así pues, si $|h| < \delta$, entonces $|f(h) - f(0)| = |f(h)| \leqslant |g(h)| < \epsilon$. Por lo tanto $\lim_{h\to 0} f(h) = 0 = f(0)$.

4. Pongamos $f(x) = 1$ para x racional y $f(x) = -1$ para x irracional.

5. Pongamos $f(x) = a$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.



6. (a) Defínase f como sigue (véase la solución al Problema 4-15(vi)):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

(b) Póngase

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

7. Obsérvese que $f(x + 0) = f(x) + f(0)$, con lo que $f(0) = 0$. Ahora bien

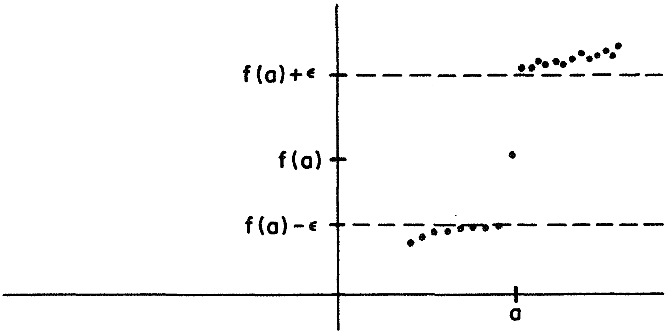
$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(a + h) - f(a) &= \lim_{h \to 0} f(a) + f(h) - f(a) \\ &= \lim_{h \to 0} f(h) \\ &= \lim_{h \to 0} f(h) - f(0) = 0, \end{aligned}$$

ya que f es continua en 0.

8. Al ser $(f + \alpha)(a) \neq 0$, el teorema 3 implica que $f + \alpha$ es distinto de cero en algún intervalo abierto que contiene a.

9. (a) Esto no es más que otra manera de definir la continuidad: Si la condición no se cumpliera, entonces para todo $\epsilon > 0$ tendríamos

$|f(x)-f(a)| \leqslant \epsilon < 2\epsilon$ para todo x suficientemente próximo de a, es decir, para todo x que satisface $|x-a| < \delta$ para algún $\delta > 0$. Si esto se cumpliera para todo ϵ, entonces f sería continua en a.



(b) Si no se cumpliera ninguna de estas condiciones, entonces para todo $\epsilon > 0$ existirían δ_1, $\delta_2 > 0$ tales que $f(x) \geqslant f(a)-\epsilon$ para $|x-a| < \delta_1$ y $f(x) \leqslant f(a)+\epsilon$ para $|x-a| < \delta_2$. Si $|x-a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces $f(a)-\epsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a)+\epsilon$, de modo que $|f(x)-f(a)| \leqslant \epsilon$. Puesto que esto se cumpliría para todo $\epsilon > 0$, se seguiría que f sería continua en a.

10. (a)

$$\lim_{x \to a} |f|(x) = |\lim_{x \to a} f(x)| \qquad \text{según el Problema 4-14}$$

$$= |f(a)| = |f|(a).$$

(b) Las fórmulas que dan E y O en la solución del Problema 3-13 demuestran que E y O son continuas si f es continua.

(c) Esto es una consecuencia de la parte (a), ya que

$$\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

(d) Póngase $g = \max(f, 0)$ y $h = -\min(f, 0)$.

11. $1/g = f \circ g$, y f es continua en $g(a)$ si $g(a) \neq 0$. Así pues, según el teorema 2, $1/g$ es continua en a si $g(a) \neq 0$.

12. (a) Está claro que G es continua en a, ya que $G(a) = \ell = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} G(x)$. Por tanto, $f \circ G$ es continua en a según el teorema 2.

Así pues,

$$f(\ell) = f(G(a)) = (f \circ G)(a) = \lim_{x \to a} (f \circ G)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)).$$

(b) Sea $g(x) = \ell + x - a$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \ell \\ 1, & x = \ell. \end{cases}$$

Entonces $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$, de modo que $f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(\ell) = 1$; pero $g(x) \neq \ell$ para $x \neq a$, con lo que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{x \to a} 0 = 0$.

13. (a) Al ser f continua en $[a, b]$, existen los límites $\lim_{t \to a^+} f(t)$ y $\lim_{t \to b^-} f(t)$. Sea

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{t \to a^+} f(t), & x \leqslant a \\ f(x), & a \leqslant x \leqslant b \\ \lim_{t \to b^-} f(t), & b \leqslant x. \end{cases}$$

(b) Póngase $f(x) = 1/(x - a)$.

14. (a) El límite $\lim_{t \to 0} f(a + t)$ existe y tiene como valor $f(a) = g(a) = h(a)$, ya que

$$\lim_{t \to 0^+} f(a + t) = \lim_{t \to 0^+} g(a + t) = g(a),$$
$$\lim_{t \to 0^-} f(a + t) = \lim_{t \to 0^-} h(a + t) = h(a).$$

(b) f es continua en c por (a), y en cualquier $x \neq c$ de $[a, b]$, ya que f coincide con g o con h en algún intervalo en torno a x.

15. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > 0$, existe entonces algún $\delta > 0$ tal que para todo x, si $a \leqslant x < x + \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < f(a)$. Esta última desigualdad implica que $f(x) > 0$. La demostración para $f(b) > 0$ es análoga.

16. (a) No en el primer caso; sí en el segundo.

(b) Tenemos

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x), \qquad \text{ya que } g(x) = f(x) \text{ para } x \neq a$$
$$= g(a), \qquad \text{por definición de } g(a).$$

(c) $g(x) = 0$ para todo x.

(d) Al ser, por definición, $g(a) = \lim_{y\to a} f(y)$, se sigue que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - g(a)| < \epsilon$ para $|y - a| < \delta$. Esto significa que

$$g(a) - \epsilon < f(y) < g(a) + \epsilon$$

para $|y - a| < \delta$. De este modo, si $|x - a| < \delta$, tenemos

$$g(a) - \epsilon \leqslant \lim_{y\to x} f(y) \leqslant g(a) + \epsilon,$$

lo cual demuestra que $|g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon$ para todo x que satisfaga $|x - a| < \delta$. Así pues, g es continua en a.

CAPÍTULO 7

1. (ii) Acotada superior e inferiormente; sin máximos ni mínimos.

   (iv) Acotada inferiormente pero no superiormente; mínimo en 0.

   (v) Acotada superior e inferiormente. Se sobreentiende que $a > -1$ (para que sea $-a-1 < a+1$). Si $-1 < a \leqslant 1/2$, entonces $a < -a-1$, de modo que $f(x) = a+2$ para todo x de $(-a-1, a+1)$ y $a+2$ es a la vez máximo y mínimo. Si $-1/2 < a \leqslant 0$, entonces f tiene el mínimo valor a^2, y si $a \geqslant 0$, entonces f tiene el mínimo 0. Puesto que solamente es $a+2 > (a+1)^2$ para $[-1-\sqrt{5}]/2 < a < [1+\sqrt{5}]/2$, cuando $a \geqslant -1/2$ esta función f tiene un máximo sólo para $a \leqslant [1+\sqrt{5}]/2$ (siendo el máximo igual a $a+2$).

   (vi) Acotada superior e inferiormente. Como en la parte (v), se supone que es $a > -1$. Si $a \leqslant -1/2$, entonces f tiene el valor $3/2$ como máximo y como mínimo. Si $a \geqslant 0$, entonces f tiene el mínimo 0 y el máximo max $(a^2, a+2)$. Si $-1/2 < a < 0$, entonces f tiene el máximo $3/2$ y carece de mínimo.

   (viii) Acotada superior e inferiormente; máximo 1; sin mínimo.

   (x) Acotada superior e inferiormente; mínimo 0; el máximo es a si es racional y si a es irracional no existe máximo.

   (xii) Acotada superior e inferiormente; mínimo 0; máximo $[a]$.

2. (ii) $n = -5$, ya que $f(-5) = 2(-5) + 1 < 0 < f(-4)$.

   (iv) $n = 0$, ya que las dos raíces de $f(x) = 0$ están en $[0, 1]$.

3. (ii) Si $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$, entonces $f(0) > 0$ y $f(2) = (\operatorname{sen} 2) - 1 < 0$.

4. (a) Póngase $\ell = (n-k)/2$ y

$$f(x) = (x^{2\ell} + 1)(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-k).$$

   (b) Si f tiene las raíces $a_1, \ldots, a_r$ con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_r$, de modo que $k = m_1 + \ldots + m_r$, entonces

$$f(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{m_r} g(x)$$

donde g es una función polinómica de grado $n-(m_1+\ldots+m_r) = n-k$ sin raíces. Del teorema 9 se sigue que $n-k$ es par.

6. De no ser así, f tomaría valores tanto positivos como negativos, con lo que f tendría el valor 0 en algún punto de $(-1, 1)$, lo cual es imposible, ya que es $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ cuando x está en $(-1, 1)$.

8. De no ser así, sería entonces $f(x) = g(x)$ para algún x y $f(y) = -g(y)$ para algún y. Pero f es o bien siempre positiva o bien siempre negativa, ya que $f(x) \neq 0$ para todo x. Así pues, $g(x)$ y $g(y)$ tendrían distinto signo. Esto implicaría que $g(z) = 0$ para algún z, lo cual es imposible, ya que $0 \neq f(z) = \pm g(z)$.

9. (a) $f(x) > 0$ para todo $x \neq a$. Ya que si es $x_0 > a$ el punto en que $f(x_0) > 0$, y si es $f(x) < 0$ para algún $x > a$, entonces es $f(z) = 0$ para algún z en el intervalo entre x_0 y x; al ser $z \neq a$, esto contradice la hipótesis. La demostración para $x < a$ es análoga.

   (b) Para $y \neq 0$, pongamos $f(x) = x^2 + xy + y^2$ (si queremos ser muy explícitos, podemos poner f_y en vez de f). Entonces $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$ y $f(x) > 0$ para $x = \pm y$, con lo que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ según la parte (a).

   (c) * Pongamos $f(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Según puede fácilmente comprobarse es $f(x, y) = (x+y)(x^2+y^2)$. Si es $x \neq 0$ o $y \neq 0$, el signo de $f(x, y)$ será evidentemente el de $x + y$, puesto que $x^2 + y^2$ es siempre positivo. Además, $f(x, y)$ será 0 sólo cuando $x = -y$.

12. (a) Utilícese la demostración del problema 11, pero aplicándola a f y $-I$.

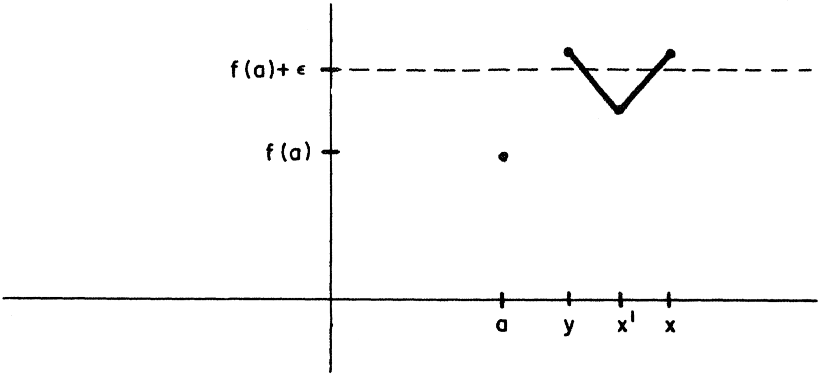
    (b) Aplíquese la misma demostración a f y g.

13. (a) No, f no es continua en $[-1, 1]$.
    Si $a < b$ son dos puntos de $[-1, 1]$ con $a, b > 0$ o $a, b < 0$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$, ya que f es continua en $[a, b]$. Por otra parte, si $a < 0 < b$, entonces f toma todos los valores entre -1 y 1 en $[a, b]$, con lo que f toma ciertamente todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. El mismo razonamiento es aplicable para $a = 0$ o $b = 0$ (puesto que $f(0)$ está por definición en $[-1, 1]$).

    (b) Si f no fuese continua en a, entonces (según el Problema 6-9(b)) para algún $\epsilon > 0$ existirían x tan cerca como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \epsilon$ o $f(x) < f(a) - \epsilon$. Supongamos que ocurre lo primero. Podemos incluso suponer que existen x tan cerca como se quiera de a y $> a$, o bien tan cerca como se quiera de a y $< a$. Supongamos también

* *Nota del traductor.* — Al haber encontrado alguna incoherencia en el original, la solución que aquí damos se aparta del mismo.

aquí lo primero. Tomemos un $x > a$ con $f(x) > f(a) + \epsilon$. Según el teorema de los Valores Intermedios, existe un x' entre a y x con $f(x') < f(a) + \epsilon$. Pero existe también y entre a y x' con $f(y) > f(a) + \epsilon$. Según el teorema de los Valores Intermedios, f forma el valor $f(a) + \epsilon$ entre x y x' y también entre x' e y, contrariamente a la hipótesis.



(c) Lo mismo que en (b), elíjase $x_1 > a$ con $f(x_1) > f(a) + \epsilon$. Elíjase después x_1' entre a y x_1 con $f(x_1') < f(a) + \epsilon$. Después elíjase x_2 entre a y x_1' con $f(x_2) > f(a) + \epsilon$ y x_2' entre a y x_2 con $f(x_2') < f(a) + \epsilon$, etc. Entonces f toma el valor $f(a) + \epsilon$ en cada uno de los intervalos $[x'_n, x_n]$, en contradicción con la hipótesis.

14. (a) Esto es evidente, ya que $|cf|(x) = |c| \cdot |f(x)|$ para todo x de $[0, 1]$.

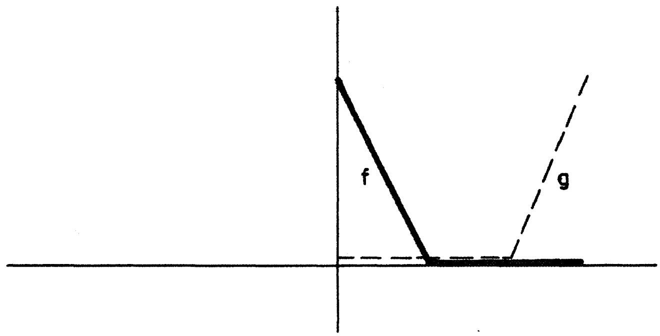
(b) Tenemos

$$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant |f|(x) + |g|(x).$$

Si $|f + g|$ tiene su máximo en x_0, entonces

$$\|f + g\| = |f + g|(x_0) \leqslant |f|(x_0) + |g|(x_0) \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Si f y g son las funciones indicadas en la figura que sigue, entonces $\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = 1$, con lo que $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$. (Obsérvese que esto ocurre a pesar de ser $|f + g|(x) = |f|(x) + |g|(x)$ para todo x.)



(c) Aplíquese la parte (b) poniendo $h - g$ en el lugar de f y $g - f$ en el lugar de g.

15. (a) Elíjase $b > 0$ de modo que sea $|\phi(b)/b^2| < 1/2$. Entonces

$$b^n + \phi(b) = b^n\left(1 + \frac{\phi(b)}{b^n}\right) > \frac{b^n}{2} > 0.$$

Análogamente, si $a < 0$ y $|\phi(a)/a^2| < 1/2$, entonces $a^n + \phi(a) < a^n/2 < 0$. Así pues, $x^n + \phi(x) = 0$ para algún x de $[a, b]$.

(b) Elíjase $a > 0$ tal que $a^n > 2\phi(0)$ y tal que $|\phi(x)/x^n| < 1/2$ para $|x| > a$. Entonces para $|x| > a$ tenemos

$$x^n + \phi(x) = x^n\left(1 + \frac{\phi(x)}{x^n}\right) > \frac{x^n}{2} > \frac{a^n}{2} > \phi(0),$$

con lo que el mínimo de $x^n + \phi(x)$ cuando x está en $[-a, a]$ es el mínimo para todo x.

16. Si

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0,$$

pongamos

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0|).$$

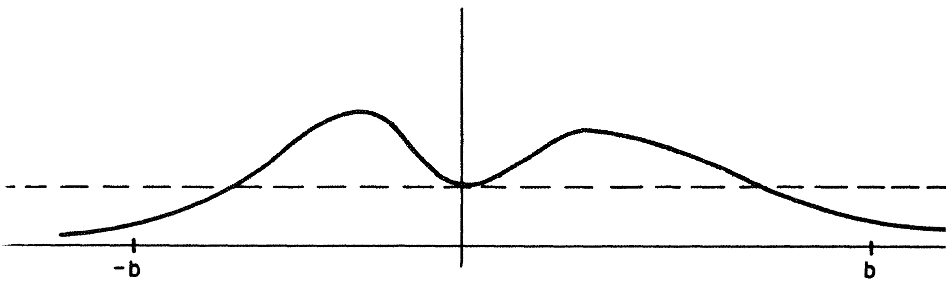
Entonces para todo x con $|x| \geqslant M$ tenemos

$$\frac{1}{2} \leqslant 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n},$$

$$|f(x)| = |x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)| \geqslant x^n/2.$$

Si $b > M$ satisface $|b^n| \geqslant 2f(0)$, entonces $|f(x)| \geqslant |f(0)|$ para $|x| \geqslant b$. Así pues, el mínimo de $|f(x)|$ en $[-b, b]$ es a la vez el mínimo en $\mathbf{R}$. (Naturalmente este problema puede generalizarse exactamente igual que el Problema 15: Si ϕ es continua y $\lim_{x\to\infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim_{x\to-\infty} \phi(x)/x^n$, existe entonces un número y tal que $|y^n + \phi(y)| \leqslant |x^n + \phi(x)|$ para todo x.)

17. Tómese un $b > 0$ tal que $f(x) < f(0)$ para $|x| > b$. Entonces el máximo de f en $[-b, b]$ es también el máximo en $\mathbf{R}$.



18. (a) Aplíquese el teorema 3 a la función (continua)

$$d(z) = \sqrt{(f(z))^2 + (z-x)^2},$$

que proporciona la distancia de $(x, 0)$ a $(z, f(z))$, para z en $[a, b]$.

(b) Si es $f(x) = x$ en (a, b), entonces no hay ningún punto de la gráfica que sea el más próximo al (a, a).

(c) Está claro que la función d de la parte (a) satisface $\lim_{z\to\infty} d(z) = \infty = \lim_{z\to-\infty} d(z)$, ya que $d(z) \geqslant |z-x|$. Elíjase un $c > 0$ tal que $d(z) > d(0)$ para $|z| > c$. Entonces el mínimo de d en $[-c, c]$ será el mínimo de d en $\mathbf{R}$.

(d) Por definición, $g(x) = \sqrt{(f(z))^2 + (z-x)^2}$ para algún z de $[a, b]$. Ahora bien, $\sqrt{(f(z))^2 + (z-y)^2} \leqslant \sqrt{(f(z))^2 + (z-x)^2} + |z-y|$ para todo z. Así pues tenemos, $g(y)$, mínimo de todos los valores de $\sqrt{(f(z))^2 + (z-y)^2}$, es menor o igual que $|z-y|$ + el mínimo de todos los $\sqrt{(f(z))^2 + (z-x)^2}$, lo cual es igual a $g(x) + |y-x|$. Al ser $|g(y) - g(x)| \leqslant |y-x|$ se sigue que g es continua (dado $\epsilon > 0$, tómese $\delta = \epsilon$).

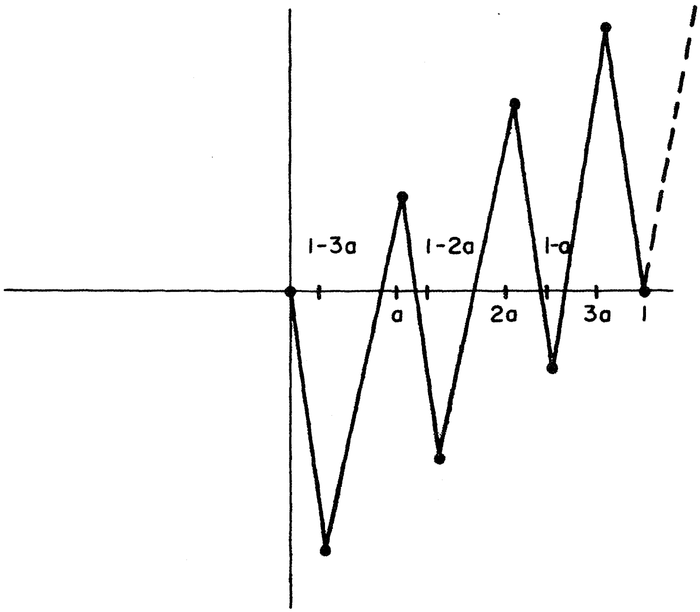
(e) Aplíquese el teorema 3 a la función g, continua en $[a, b]$.

19. (a) Si la función continua g satisface $g(x) \neq 0$ para todo x, entonces, o bien $g(x) > 0$ para todo x, o bien $g(x) < 0$ para todo x, es decir, o bien $f(x) > f(x + 1/n)$ o bien $f(x) < f(x + 1/n)$ para todo x. En el primer caso, por ejemplo, tendríamos

$$f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{2}{n}\right) > \ldots > f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1),$$

en contradicción con la hipótesis de ser $f(0) = f(1)$.

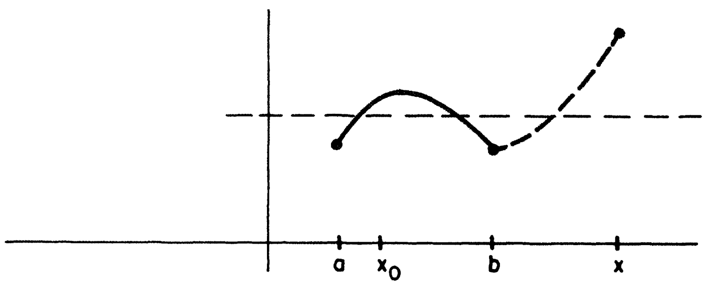
(b) La figura que sigue representa una de estas funciones f cuando $1/4 < a < 1/3$.



En general, si $1/(n + 1) < a < 1/n$, defínase f de modo arbitrario en $[0, a]$, con la única condición de ser $f(0) = 0$, $f(a) > 0$ y $f(1 - na) = -nf(a)$. Al ser $1/(n + 1) < a < 1/n$, los números 0, $1 - na$ y a son distintos, por lo que tal elección de f será posible. Defínase después f en $[ka, (k + 1)a]$ poniendo $f(ka + x) = f(x) + ka$. Tenemos, en particular, $f(1) = f(na + (1 - na)) = na + f(1 - na) = 0$, pero $f(x + a) - f(x) = f(a) > 0$ para todo x.

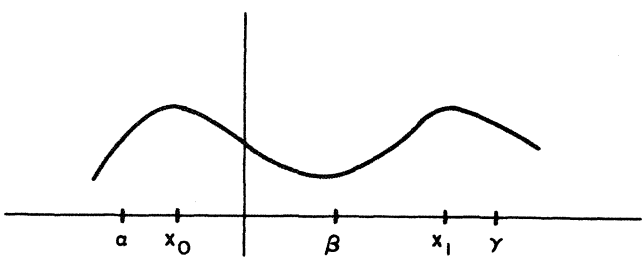
20. (a) Si $f(a) = f(b)$ para $a < b$, no podemos tener entonces $f(x_1) > f(a)$ y $f(x_2) < f(a)$ con x_1, x_2 en $[a, b]$, ya que esto implicaría que $f(x) = f(a)$

para algún x entre x_1 y x_2, con lo que f tomaría tres veces el valor $f(a)$. Así pues, o bien $f(x) > f(a)$ para todo x de (a, b), o por el contrario $f(x) < f(a)$ para todo x de (a, b). Suponiendo lo primero, tomemos un x_0 cualquiera de (a, b). El teorema de los Valores Intermedios implica que f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(x_0)$ en el intervalo $[a, x_0]$ y también en el intervalo $[x_0, b]$. Así pues, no podemos tener $f(x) > f(a)$ para $x < a$ o $x > b$, ya que esto implicaría que f tomara estos valores una tercera vez (en $[x, a]$ o $[b, x]$).



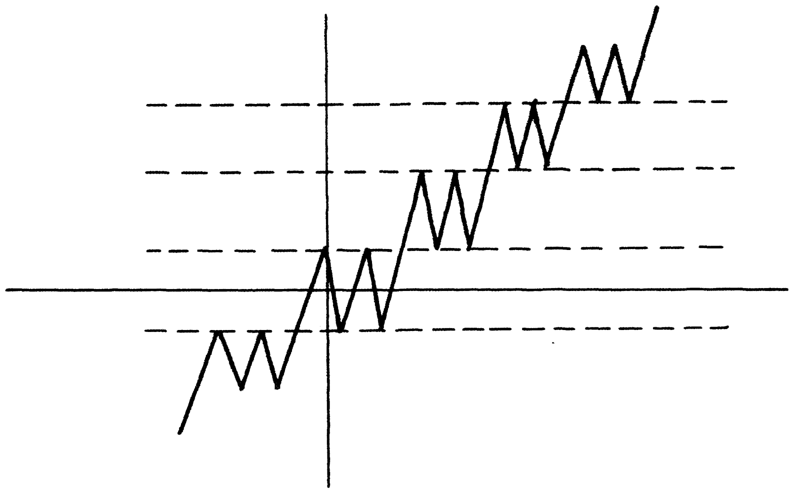
De este modo f es en realidad acotada superiormente en $\mathbf{R}$ (por ser acotada en $[a, b]$), lo cual excluye que pueda tomar cualquier valor.

(b) Es más, aun permitiendo que f pueda no alcalzar todos los valores, seguiría siendo verdad que f tiene en realidad un máximo M en $\mathbf{R}$ (el máximo de $[a, b]$ será el máximo de $\mathbf{R}$). Pero f tiene que tomar este valor dos veces, pongamos que en x_0 y en x_1. Tomemos $\alpha < x_0 < \beta < y_0 < \gamma$.



Si m es el máximo de $f(\alpha)$, $f(\beta)$ y $f(\gamma)$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre m y M en cada uno de los intervalos $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$, $[\beta, x_1]$ y $[x_1, \gamma]$, lo cual es imposible.

(c) La figura que sigue, para $n = 5$, ilustra el caso general.



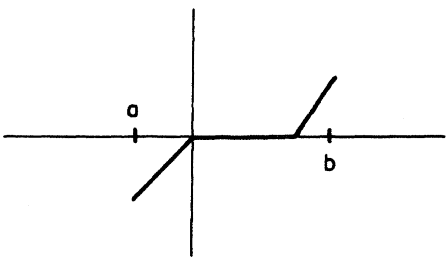
(d) Tomemos $x_1 < \ldots < x_n$ con $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = a$. En cada intervalo (x_i, x_{i+1}), o bien es $f > a$, o bien $f < a$. Al ser n par, existe un número impar, $n - 1$, de estos intervalos, de modo que es o bien $f > a$ o bien $f < a$ en más de la mitad de ellos. Así pues, en por lo menos $n/2$ intervalos es $f > a$ o bien en por lo menos $n/2$ intervalos es $f < a$. Si ocurre lo primero, f toma entonces todos los valores algo mayores que a por lo menos dos veces en por lo menos $n/2$ intervalos. Esto demuestra que f no puede volver a tomar estos valores en ninguna otra parte, lo cual significa que f es acotada superiormente. (Además, el mismo tipo de razonamiento que se ha utilizado en la parte (c) hace ver que f tendría que tomar valores algo menores que el máximo por lo menos $2n$ veces.)

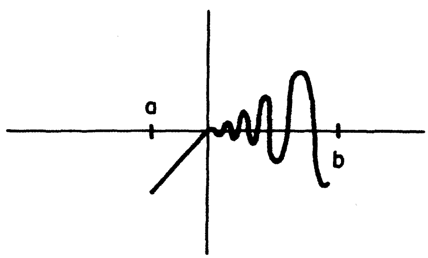
CAPÍTULO 8

1. (ii) 1 es el máximo y -1 es el mínimo.
   (iv) 0 es el mínimo y $\sqrt{2}$, que no pertenece al conjunto, es el supremo.
   (vi) Al ser $\{x\colon x^2 + x + 1 < 0\} = ([-1 - \sqrt{5}]/2, [-1 + \sqrt{5}]/2)$, el ínfimo es $[-1 - \sqrt{5}]/2$ y el supremo $[-1 + \sqrt{5}]/2$; ninguno de los dos pertenece al conjunto.
   (viii) $1 - 1/2$ es el máximo y -1 el ínfimo, el cual no pertenece al conjunto.

2. (b) Al estar A acotado inferiormente, $B \neq \phi$. Puesto que $A \neq \phi$, existe algún x en A. Ningún y que sea mayor que x es cota inferior de A, o sea que ninguno de tales y pertenece a B. B está pues acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup B$. Entonces α es automáticamente mayor o igual que cualquier cota inferior de A, con lo que basta demostrar que α es cota inferior de A. Ahora bien, si α no fuese cota inferior de A, existiría en A algún x con $x < \alpha$. Al ser α la cota superior *mínima* de B, esto significaría que en B existe algún y con $x < y < \alpha$. Pero esto es imposible, ya que $x < y$ significa que y no es cota inferior de A y por lo tanto y no puede pertenecer a B.

3. (a) No. Por ejemplo, en las funciones f abajo indicadas no existe penúltimo (inmediato al mínimo) valor de x con $f(x) = 0$





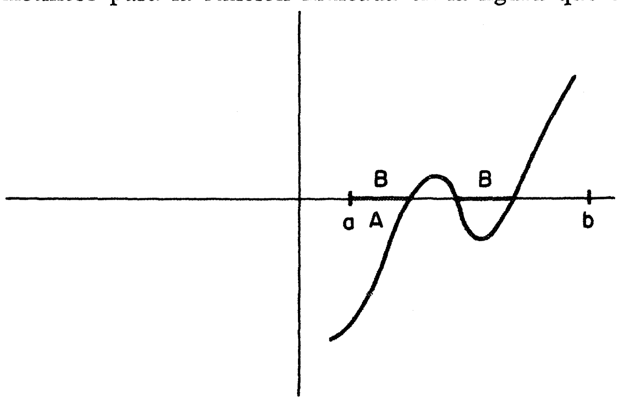
Puesto que $b - a + x$ varía entre b y a cuando x varía entre a y b, la función $g(x) = f(b - a + x)$ satisface $g(a) = f(b) > 0$ y $g(b) =$

$= f(a) < 0$. Existe pues un elemento mínimo y con $g(y) = 0$. Por lo tanto $x = b - a + y$ es el x máximo con $f(x) = 0$.

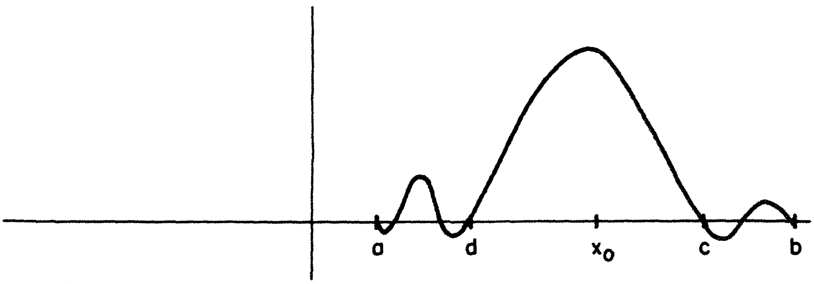
(b) Está claro que $B \neq \phi$, ya que a está en B; es más, existe algún $\delta > 0$ tal que B contiene todos los puntos x que satisfacen $a \leqslant x < a + \delta$, según el Problema 6-15, ya que f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0$. Análogamente, b es cota superior de B y, aún más, existe un $\delta > 0$ tal que todos los puntos x que satisfacen $b - \delta < x \leqslant b$ son cotas superiores de A; esto es también consecuencia del Problema 6-15, ya que f es continua en $[a, b]$ y $f(b) > 0$.

Sea $\alpha = \sup A$. Entonces $a < \alpha < b$. Supóngase $f(\alpha) < 0$. Según el teorema 6-3, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$. Significa esto que $\alpha + \delta/2$ está en A, lo cual es una contradicción. Análogamente, supóngase $f(\alpha) > 0$. Existiría entonces un $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$. Pero entonces $\alpha - \delta/2$ sería también cota superior de B, en contradicción con el hecho de ser α la cota superior mínima. Así pues, $f(\alpha) = 0$.

Este α es el x máximo de $[a, b]$ con $f(x) = 0$. Los conjuntos A y B son distintos para la función indicada en la figura que sigue.



4. Sea c el elemento x de $[a, x_0]$ máximo que satisface $f(x) = 0$ y d el elemento x de $[x_0, b]$ mínimo que cumple la misma condición.



6. (a) Por la definición de continuidad tenemos $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ para todo a, de modo que basta demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ (sabiendo que el límite ℓ existe). Dado ahora un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$. Puesto que A es denso, existe un número x en A que satisface $0 < |x - a| < \delta$; así pues, $|0 - \ell| < \epsilon$. Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que $\ell = 0$.

   (b) Aplíquese la parte (a) a $f - g$.

   (c) Lo mismo que para la parte (b), basta evidentemente demostrar que si f es continua y $f(x) \geqslant 0$ para todos los números x de A, entonces $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Ahora bien, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < |\ell|/2$. Esto implica que $f(x) < \ell + |\ell|/2$; si $\ell < 0$, se seguiría que $f(x) < 0$, lo cual sería falso para aquellos x de A que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$.

   No se puede sustituir $\geqslant$ por $>$. Por ejemplo, si $f(x) = |x|$, entonces $f(x) > 0$ para todo x del conjunto denso $\{x\colon\ x \neq 0\}$, pero no se cumple que $f(x) > 0$ para todo x.

7. Según el Problema 3-16, tenemos $f(x) = cx$ para todos los x racionales (siendo $c = f(1)$). Al ser f continua, se sigue del Problema 6 que $f(x) = cx$ para todo x (aplíquese el problema 6 a f y $g(x) = cx$).

8. (a) El conjunto $\{f(x) : x < a\}$ está acotado superiormente (por $f(a)$); sea $\alpha = \sup\ \{f(x) : x < a\}$. Entonces $\lim_{x \to a^-} f(x) = \alpha$: Dado un $\epsilon > 0$ cualquiera, existe un $f(x)$ para $x < a$ con $f(x) > \alpha - \epsilon$, ya que α es el supremo de $\{f(x)\colon\ x < a\}$. Sea $\delta = a - x$. Si $a - \delta < y < a$, entonces $x < y < a$, de modo que $f(x) \leqslant f(y)$. Esto significa que $\alpha \geqslant f(y) > \alpha - \epsilon$, de modo que es ciertamente $|f(y) - \alpha| < \epsilon$.

   La demostración de que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\ \{f(x) : x > a\}$ es análoga.

   (b) Resulta claro por la parte (a) que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$

   Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, se sigue que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x),$$

   con lo que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Así pues, f es continua en a, con lo que f no puede tener una discontinuidad en a.

   (c) Si f deja de ser continua en algún punto a, entonces

$$\sup\ \{f(x)\colon\ x < a\} = \lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\ \{f(x)\colon\ x > a\}.$$

Se sigue que $f(x)$ no puede tener ningún valor comprendido entre $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$, excepto $f(a)$, con lo que f no puede satisfacer la conclusión del teorema de los Valores Intermedios.

9. (a) Es evidente para $|||\quad|||$, ya que $|cf|(x) = |c| \cdot |f(x)|$ para todo x de $[0, 1]$.

(b) Tenemos $|f+g|(x) \leqslant |f|(x) + |g|(x)$ para todo x de $[0, 1]$. Al ser $|||f+g|||$ igual a $\sup\{|f+g|(x)\colon x \text{ está en } [0, 1]\}$ existe algún x_0 en $[0, 1]$ con

$$|||f+g||| - |f+g|(x_0) < \epsilon,$$

lo cual implica que

$$|||f+g||| - [|f|(x_0) + |g|(x_0)] < \epsilon.$$

Al ser $|f|(x_0) \leqslant |||f|||$ y $|g|(x_0) \leqslant |||g|||$, se sigue que

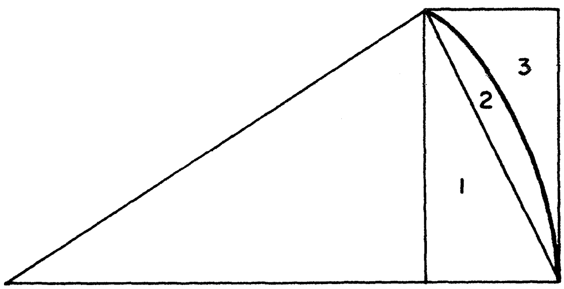
$$|||f+g||| - [|||f||| + |||g|||] < \epsilon.$$

Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, se sigue $|||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g|||$.

(c) Es consecuencia de (b), lo mismo que en el Problema 7-14.

11. (a) Tenemos $a_{n+1} \leqslant a_1/2^n < a_1/n$. Elíjase n de modo que $1/n < \epsilon/a_1$ Entonces es $a_{n+1} < \epsilon$.

(b) Sea R_1 el área de la región con el número 1 de la figura que sigue.



Tenemos que demostrar que

$$R_2 < \frac{1}{2}(R_1 + R_2),$$

o

$$R_2 < R_1.$$

Esto está claro, ya que $R_2 < R_2 + R_3 = R_1$.

(c) Aplíquese la parte (a) con $a_n =$ área del círculo menos área del polígono regular inscrito con 2^{n+1} lados; por la parte (b) sabemos que $a_{n+1} \leqslant a_n/2$.

(d) Sean r_1 y r_2 los radios de los dos círculos C_1 y C_2, y sea A_i el área de la región limitada por C_i. Sabemos que existen números δ_1, $\delta_2 > 0$ tales que

$$\left| \frac{A_1}{A_2} - \frac{B_1}{B_2} \right| < \epsilon$$

para cualesquiera números B_1, B_2 con $|A_i - B_i| < \delta_i$. Según la parte (c) existen números n_i tales que el área de un polígono regular, con n_i lados, inscrito en C_i, difiere de A_i en menos de δ_i. Sea P_i el área de un polígono regular inscrito en C_i de lado max (n_1, n_2). Entonces

$$\left| \frac{A_1}{A_2} - \frac{P_1}{P_2} \right| < \epsilon,$$

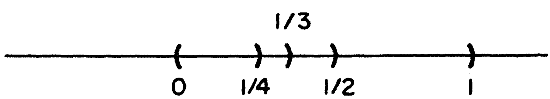
con lo que

$$\left| \frac{A_1}{A_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right| < \epsilon.$$

Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que $A_1/A_2 = r_1^2/r_2^2$.

14. (a) Para cada n y para cada m tenemos $a_n \leqslant b_m$, ya que $a_n \leqslant a_{n+m} \leqslant \leqslant b_{n+m} \leqslant b_m$. Del problema 13 se desprende que sup $\{a_n\colon n$ en $\mathbf{N}\} \leqslant \leqslant$ inf $\{b_n\colon n$ en $\mathbf{N}\}$. Sea x un número cualquiera comprendido entre estos dos números. Entonces es $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ para todo n, con lo que x está en todos los I_n.

(b) Pongamos $I_n = (0, 1/n)$.



15. Sea c el punto contenido en cada uno de los intervalos I_n. Si $f(c) < 0$, tiene que existir un $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x de $[a, b]$ con $|x - c| < \delta$. Elíjase n con $1/2^n < \delta$. Al estar c en I_n, cuya longitud total es $1/2^n$, se sigue que todos los puntos x de I_n satisfacen $|x - c| < \delta$. Esto está en contradicción con el hecho de que f cambia de signo en I_n. La demostración de que no puede ser $f(c) > 0$ es análoga. Así pues, $f(c) = 0$.

16. Sea c el punto que está en cada uno de los intervalos I_n. Al ser f continua en c, existe un $\delta > 0$ tal que f es acotada en el conjunto de todos los puntos de $[0, 1]$ que satisfacen $|x - c| < \delta$. Elíjase n con $1/2^n < \delta$. Al

estar c en I_n, todos los puntos x de I_n satisfacen $|x - c| < \delta$. Esto está en contradicción con el hecho de que f no es acotada en I_n.

17. (a) (i) Si x está en A entonces $x < \alpha$. De ahí que $y < x < \alpha$, $y < \alpha$ y por lo tanto y está en A.

(ii) $\alpha - 1$ está en A.

(iii) $\alpha + 1$ no está en A.

(iv) Si x está en A, entonces $x < \alpha$. Sea $x' = (x + \alpha)/2$. Entonces $x < x' < \alpha$, de donde x' está en A.

(b) Según (iii) existe algún y no perteneciente a A. Si $y < x$, entonces x no puede estar en A, ya que (i) implicaría que y está en A. Así pues, y es una cota superior de A y, según (ii), $A \neq \phi$, con lo que sup A existe. Dado x en A, elíjase x' en A, según (iv), con $x < x'$. Entonces $x < x' \leqslant \sup A$, con lo que $x < \sup A$. Recíprocamente, si $x < \sup A$, existe entonces un y en A con $x < y$. De aquí que, por (i), x está en A.

18. (a)

	Casi cotas superiores	*Casi cotas inferiores*
(i)	Todos los $\alpha > 0$.	Todos los $\alpha \leqslant 0$.
(ii)	Todos los $\alpha > 0$.	Todos los $\alpha < 0$.
(iii)	Todos los $\alpha > 0$.	Todos los $\alpha \leqslant 0$.
(iv)	Todos los $\alpha \geqslant \sqrt{2}$.	Todos los $\alpha \leqslant 0$.
(v)	Ninguna.	Ninguna
(vi)	Todos los $\alpha \geqslant [-1 + \sqrt{5}]/2$.	Todos los $\alpha \leqslant [-1 - \sqrt{5}]/2$.
(vii)	Todos los $\alpha \geqslant 0$.	Todos los $\alpha \leqslant [-1 - \sqrt{5}]/2$.
(viii)	Todos los $\alpha > 1$.	Todos los $\alpha \leqslant -1$.

(b) Toda cota superior de A es ciertamente una casi cota superior, con lo que $B \neq \phi$. Ninguna cota inferior de A puede ser al mismo tiempo casi cota superior de A (por ser A infinito), de donde se deduce que B está acotado inferiormente por cualquier cota inferior de A.

(c) (i), (ii), (iii) 0.

(iv) $\sqrt{2}$.

(v) No existe.

(vi) $[-1 + \sqrt{5}]/2$.

(vii) 0.

(viii) 1.

(d) $\underline{\lim}\, A = \sup C$, donde C es el conjunto de las casi cotas inferiores.

(i), (ii), (iii), (iv) 0.

(v) No existe.

(vi) $[-1+\sqrt{5}]/2$.
(vii) $[-1+\sqrt{5}]/2$.
(viii) -1.

19. (a) Si x es una casi cota inferior de A, e y una casi cota superior, existe entonces solamente un número finito de números en A que son menores que x o mayores que y. Por ser A infinito deberemos tener $x \leqslant y$. Así pues (Problema 12), $\underline{\lim}\, A \leqslant \overline{\lim}\, A$.

(b) Esto está claro, ya que $\overline{\lim}\, A \leqslant \alpha$ para cualquier casi cota superior α, y $\alpha = \sup A$ es una casi cota superior.

(c) Si $\overline{\lim}\, A < \sup A$, existe una casi cota superior x de A con $x < \sup A$. Existe pues solamente un número finito de números de A que son mayores que x (y existe por lo menos uno, ya que $x < \sup A$). El más grande de estos elementos es el elemento máximo de A.

(d) Inviértase el sentido de las desigualdades en los razonamientos de las partes (b) y (c).

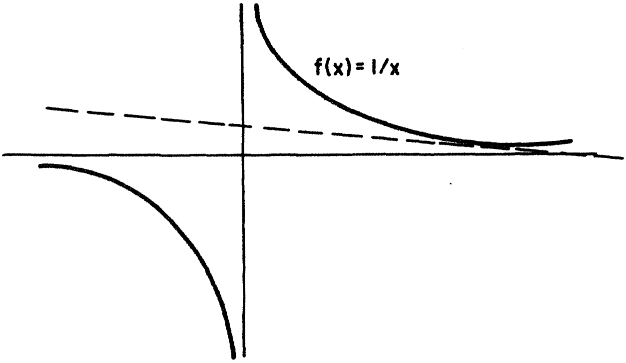
20. (a) Obsérvese que debemos tener $f(x) \leqslant f(\sup A)$, ya que f es continua en $\sup A$ y existen puntos y tan próximos como se quiera de $\sup A$ con $f(x) \leqslant f(y)$. (Estamos pasando por alto un sencillo razonamiento del tipo $\epsilon - \delta$.) Supóngase ahora que $\sup A < b$. Entonces $f(b) < f(x)$. Además, $\sup A$ es un punto de sombra, con lo que existe $z > \sup A$ con $f(z) > f(\sup A) \geqslant f(x)$. No podemos tener $z \leqslant b$, ya que esto supondría que z está en A. Así pues, $z > b$ y $f(b) < f(x) \leqslant f(z)$, en contradicción con el hecho de que b no es un punto de sombra.

(b) Al ser f continua en a, y $f(x) \leqslant f(b)$ para todo x de (a, b), se sigue que $f(a) \leqslant f(b)$ (ya sea por un sencillo razonamiento $\epsilon - \delta$ o, si se prefiere, utilizando el Problema 6).

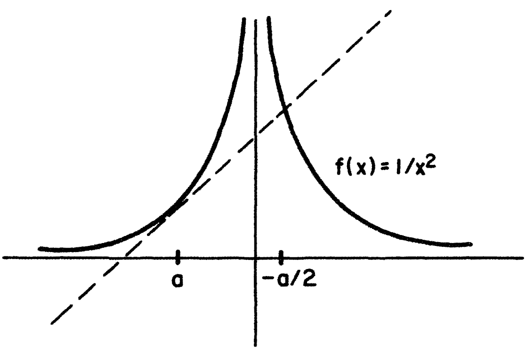
(c) Si fuese $f(a) < f(b)$, entonces a sería un punto de sombra, con lo que tiene que ser $f(a) = f(b)$.

CAPíTULO 9

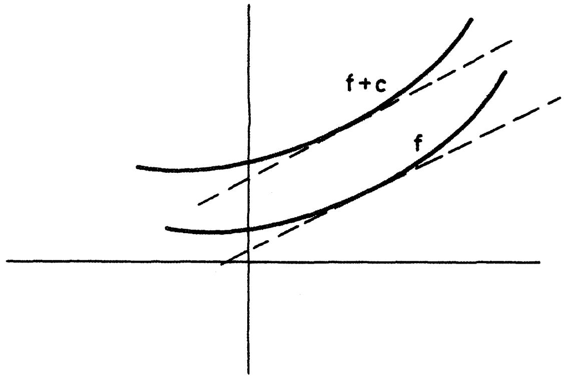
1. (b) La disposición de las tangentes a la gráfica de $f(x) = 1/x$ queda clara en la figura adjunta.



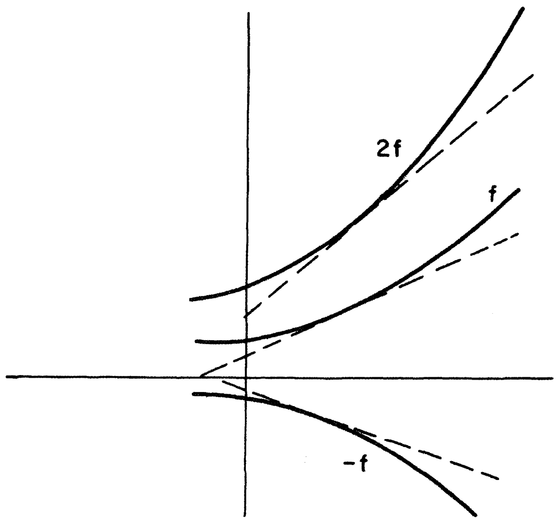
2. (b) En la figura que sigue puede verse la disposición de las tangentes a la gráfica de $f(x) = 1/x^2$.



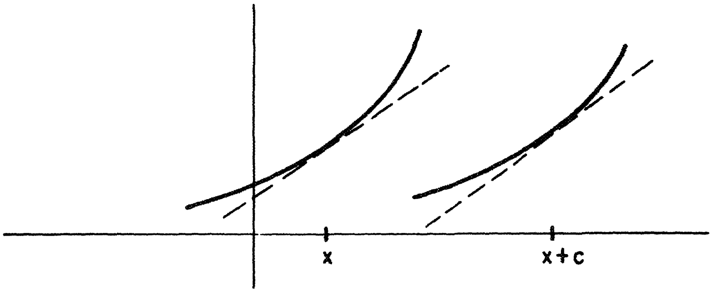
6. (a) La figura que sigue indica la relación entre f' y $(f + c)'$.



(b) La figura que sigue indica la relación entre f' y(cf').



8. (a) La figura que sigue indica la relación entre f' y g' si $g(x) = f(x + c)$.



12. (a) $a'(t) = L(a(t))$ (la velocidad en el tiempo t debe ser la velocidad permitida en el punto $a(t)$ en que se encuentra el vehículo).

(b) La hipótesis significa que $b(t) = a(t-1)$. Así pues,

$$b'(t) = a'(t-1) = L(a(t-1)) = L(b(t)).$$

(c) Supóngase que $b(t) = a(t) - c$. Entonces $b'(t) = a'(t) = L(a(t))$, mientras que $b'(t)$ tiene que ser $L(b(t)) = L(a(t) - c)$. Así pues, B va a velocidad límite si la función L es periódica, con período c.

13. El límite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h(a+t) - h(a)}{t}$ existe, puesto que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(a+t) - g(a)}{t}$$

$$= \text{derivada de } g \text{ por la derecha},$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{h(a+t) - h(a)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

$$= \text{derivada de } f \text{ por la izquierda},$$

y los dos límites son iguales.

14.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Ahora bien

$$\frac{f(h)}{h} = \begin{cases} 0, & h \text{ irracional} \\ \dfrac{h^2}{h} = h, & h \text{ racional,} \end{cases}$$

con lo que $\lim\limits_{h\to 0} f(h)/h = 0$.

15. (a) Obsérvese que $f(0) = 0$. Al ser $|f(h)/h| \leqslant h^2/|h| \leqslant |h|$, se sigue que $\lim_{h\to 0} f(h)/h = 0$, es decir, $f'(0) = 0$.

(b) Si $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$, entonces $f'(0) = 0$: Ya que $|f(h)/h| \leqslant |g(h)/h| = |[g(h) - g(0)]/h|$, lo cual, al ser $g'(0) = 0$, puede hacerse tan pequeño como se quiera, sin más que elegir h suficientemente pequeño.

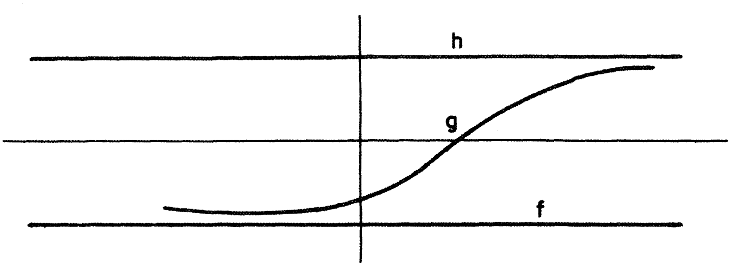
16. Al ser $|f(0)| \leqslant |0|^\alpha$, tenemos $f(0) = 0$. Ahora bien $|f(h)/h| \leqslant |h|^{\alpha-1}$, y $\lim_{h\to 0} |h|^{\alpha-1} = 0$ ya que $\alpha > 1$, con lo que $\lim_{h\to 0} f(h)/h = 0$. Así pues, $f'(0) = 0$.

17. $|f(h)/h| \geqslant |h|^{\beta-1}$; al ser $\beta - 1 < 0$, el número $|h|^{\beta-1}$ se hace grande al tender h hacia 0, con lo que el límite $\lim_{h\to 0} f(h)/h$ no existe.

18. Si a es racional, al no ser f continua en a, tampoco será f derivable en a. Si $a = 0.a_1a_2a_3 \ldots$ es irracional y h es racional, entonces $a + h$ es irracional, con lo que $f(a + h) - f(a) = 0$. Pero si $h = -0.00 \ldots 0\ a_{n+1}a_{n+2} \ldots$, entonces $a + h = 0.a_1a_2 \ldots a_n000 \ldots$, con lo que $f(a + h) \geqslant 10^{-n}$, mientras que $|h| < 10^{-n}$, lo cual hace que $|[f(a + h) - f(a)]/h| \geqslant 1$. Así pues, $[f(a + h) - f(a)]/h$ es 0 para valores de h tan pequeños como se quiera y tiene valores absolutos mayores que 1 también con h tan pequeño como se quiera, lo cual dice que $\lim_{h\to 0} [f(a + h) - f(a)]/h$ no existe.

19. (a) $\dfrac{f(a + t) - f(a)}{t} \leqslant \dfrac{g(a + t) - g(a)}{t} \leqslant \dfrac{h(a + t) - h(a)}{t}$, ya que $f(a) = g(a) = h(a)$. El primero y el último miembro tienden hacia el mismo límite, con lo que el miembro intermedio debe también tender hacia el mismo límite.

(b) A continuación se indica un contraejemplo sin la condición $f(a) = g(a) = h(a)$.



20. (a) $d(x) = f(x) - f(a)(x - a) - f(a) = x^4 - 4a^3(x - a) - a^4$
$= x^4 - 4a^3x + 3a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x - 3a^3)$
$= (x - a)(x - a)(x^2 + 2ax + 3a^2)$.

(b) Está claro que a es raíz de $f(x) - f(a)$, con lo que $f(x) - f(a)$ es divisible por $x - a$ según el Problema 3-7. Esto significa que $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ es una función polinómica, con lo que $d(x)/(x - a)$ es la función polinómica $h(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a) - f'(a)$. Entonces es $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 0$ según la definición de $f'(a)$. Esto implica que $h(a) = 0$, ya que la función (polinómica) h es continua. Así pues, a es raíz de $d(x)/(x - a)$, con lo que $d(x)/(x - a)$ es divisible por $(x - a)$, es decir, $d(x)$ es divisible por $(x - a)^2$.

22. (a)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Así pues,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right]$$
$$= f'(x).$$

(b)

$$\frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} = \frac{h}{h+k} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{k}{h+k} \cdot \frac{f(x) - f(x-k)}{k}.$$

Puesto que $[f(x+h) - f(x)]/h$ y $[f(x) - f(x-k)]/k$ se aproximan a $f'(x)$ cuando h y k son suficientemente pequeños, parece que esto tendría que implicar que

$$\frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} \quad \text{se aproxime a} \quad \left(\frac{h}{h+k} + \frac{k}{h+k}\right) f'(x) = f'(x).$$

Sin embargo, se debe tener cuidado al desarrollar este razonamiento por la siguiente razón: Si $h/(h+k)$ fuese muy grande, entonces

$$\frac{h}{h+k} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

podría diferir mucho de $hf'(x)/(h+k)$, aunque la diferencia entre $[f(x+h) - f(x)]/h$ y $f'(x)$ fuese pequeña. Será esencial hacer uso del hecho de que tanto h como k son positivos; de otro modo podría hacerse $h/(h+k)$ muy grande tomando k próximo a $-h$. En realidad, el teorema es falso si se admite que h y k puedan tener signos distintos, aun cuando se excluya el que pueda ser $h + k = 0$. El razonamiento adecuado es como sigue. Si $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < h < \delta$ y $0 < k < \delta$ tenemos

$$-\epsilon < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) < \epsilon,$$

$$-\epsilon < \frac{f(x)-f(x-k)}{k} - f'(x) < \epsilon.$$

Al ser h, $k > 0$, podemos multiplicar estas desigualdades por $h/(h+k)$ y por $k/(h+k)$, respectivamente. Al sumar obtenemos

$$-\epsilon\left(\frac{h}{h+k}+\frac{k}{h+k}\right) < \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} - \left(\frac{h}{h+k}+\frac{k}{h+k}\right)f'(x) <$$

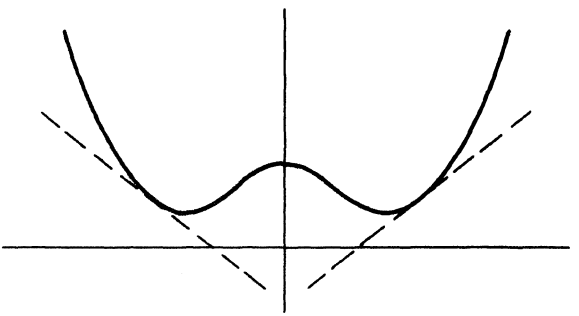
$$< \epsilon\left(\frac{h}{h+k}+\frac{k}{h+k}\right),$$

o

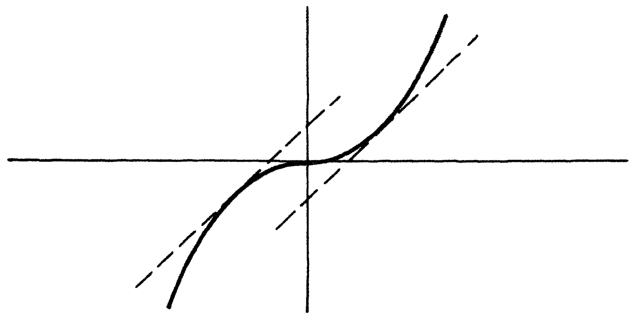
$$-\epsilon < \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} - f'(x) < \epsilon.$$

Esto demuestra el límite pedido.

23. Si $g(x) = f(-x)$, entonces $g'(x) = -f'(-x)$, según el Problema 8(b). Pero también es $g(x) = f(x)$, con lo que $g'(x) = f'(x)$ y $f'(x) = -f'(-x)$.



24. Si $g(x) = f(-x)$, entonces $g'(x) = -f'(-x)$. Pero también, $g(x) = -f(x)$, con lo que $g'(x) = -f'(x)$ y $f'(x) = f'(-x)$.



25. $f^{(k)}$ es par si k es par y f es par, o si k es impar y f es impar; $f^{(k)}$ es impar en los otros dos casos.

26. (ii) $f''(x) = 20x^4$.
(iv) $f''(x) = 20(x - 3)^3$.

27. Se demuestra por inducción sobre k. El resultado se cumple para $k = 0$. Si

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k},$$

entonces

$$S_n^{(k+1)}(x) = \frac{n!\,(n-k)}{(n-k)!}\, x^{n-k-1}$$
$$= \frac{n!}{[n-(k+1)]!}\, x^{n-(k+1)}.$$

28. (a) Al ser

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ -x^3, & x < 0, \end{cases}$$

tenemos

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \\ -6x, & x < 0. \end{cases}$$

Además, $f'(0) = f''(0) = 0$. Pero $f'''(0)$ no existe.

(b) El mismo tipo de razonamiento hace ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x > 0 \\ -4x^3, & x < 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x > 0 \\ -12x^2, & x < 0 \end{cases} \qquad f'''(x) = \begin{cases} 24x, & x > 0 \\ -24x, & x < 0 \end{cases}$$

y que $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, pero que $f^{(4)}(0)$ no existe.

29. Está claro que $f^{(k)}(x) = n!/(n-k)!\,x^{n-k}$ para $0 \leqslant k \leqslant n-1$ y $x > 0$, mientras que $f^{(k)}(x) = 0$ para todo k si $x < 0$. Partiendo de estas fórmulas es fácil ver que $f^{(k)}(0) = 0$ para $0 \leqslant k \leqslant n-1$. En particular, $f^{(n-1)}(x) = n!\,x$ para $x \geqslant 0$, y $f^{(n-1)}(x) = 0$ para $x \leqslant 0$. Así pues, $f^{(n)}(0)$ no existe, ya que $\lim\limits_{h \to 0^+} n!\,h/h = n!$, mientras que $\lim\limits_{h \to 0^-} 0/h = 0$.

30. (ii) Significa que $f'(a) = -1/a^2$ si $f(x) = 1/x$.
(iv) Significa que $g'(a) = cf'(a)$ si $g(x) = cf(x)$.
(vi) Significa que $f'(a^2) = 3a^4$ si $f(x) = x^3$.
(viii) Significa que $g'(b) = cf'(cb)$ si $g(x) = f(cx)$.
(x) Significa que $f^{(k)}(a) = k! \binom{n}{k} a^{n-k}$ si $f(x) = x^n$.

CAPÍTULO 10

1. (ii) $\cos x + 2x \cos x^2$.

   (iv) $\cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$.

   (vi) $\dfrac{x \cos(\cos x)(-\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}(\cos x)}{x^2}$.

   (viii) $\cos(\cos(\operatorname{sen} x)) \cdot (-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos x$.

2. (ii) $3 \operatorname{sen}^2 (x^2 + \operatorname{sen} x) \cdot \cos(x^2 + \operatorname{sen} x) \cdot (2x + \cos x)$.

   (iv) $\cos\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right) \cdot \dfrac{(\cos x^3)\, 3x^2 + x^3 \operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2}{\cos^2 x^3}$.

   (vi) $31^2 (\cos x)^{31^2-1} \cdot (-\operatorname{sen} x)$.

   (viii) $3 \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)) \cdot 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$.

   (x) $\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))) \cdot \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))) \cdot \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot$
   $\cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$.

   (xii) $5((x^2 + x)^3 + x)^4 \cdot [1 + 4((x^2 + x)^3 + x)^3\{1 + 3(x^2 + x)^2[1 + 2x]\}]$.

   (xiv) $\cos(6 \cos(6 \operatorname{sen}(6 \cos 6x))) \cdot 6(-\operatorname{sen}(6 \operatorname{sen}(6 \cos 6x))) \cdot 6 \cos(6 \cos 6x) \cdot$
   $\cdot 6(-\operatorname{sen} 6x) \cdot 6$.

   (xvi) $\dfrac{-\left[1 - \dfrac{-2(1 + \cos x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}\right]^2}$.

   (xviii) $\cos\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$

$$\cdot \frac{x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)-x\left[1-\cos\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\dfrac{x-\operatorname{sen} x-x[1-\cos x]}{(x-\operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\right]^2}.$$

3. Véase la página 394 del texto.

4. (ii) $\cos(\operatorname{sen} x)$.
   (iv) 0.

5. (ii) $(2x)^2$.
   (iv) $17 \cdot 17$.

6. (ii) $f'(x) = g'(x \cdot g(a)) \cdot g(a)$.
   (iv) $f'(x) = g'(x)(x-a) + g(x)$.
   (vi) $f'(x) = g'((x-3)^2) \cdot 2(x-3)$.

8. (ii) $(k \circ f)'(0) = k'(f(0)) \cdot f'(0) = 0$.

9. Por definición,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-0}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(x) \operatorname{sen} 1/x}{x}.$$

Ahora bien

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$= g'(0) = 0.$$

Puesto que $|\operatorname{sen} 1/x| \leqslant 1$, se sigue que $f'(0) = 0$ (como en el Problema 5-19).

11. (a) La regla de la cadena y el Problema 9-3 implican que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) La tangente por $(a, \sqrt{1-a^2})$ es la gráfica de

$$g(x) = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a) + \sqrt{1-a^2}.$$

Así pues, $f(x) = g(x)$, entonces

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a) + \sqrt{1-a^2}.$$

Al elevar al cuadrado se obtiene

$$1-x^2 = \frac{a^2(x-a)^2}{1-a^2} - 2a(x-a) + 1 - a^2.$$

Multiplicando por $1-a^2$ y simplificando, queda todo reducido a

$$-x^2 - a^2 = -2ax,$$

o sea, $(x-a)^2 = 0$, con lo que es $x = a$. Obsérvese que el mismo razonamiento indica que g no corta a la gráfica de $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, la cual es la mitad inferior de la circunferencia de radio unidad.

12. La gráfica de la función

$$f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

es la mitad superior de la elipse formada por todos los puntos (x, y) que satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se tiene ahora

$$f'(x) = \frac{-bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.$$

Si la tangente por $(c, b\sqrt{1-c^2/a^2})$ corta en x a la gráfica de f, entonces

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{-bc}{a^2\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}(x-c) + b\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$$

La mejor manera de resolver esta ecuación es por medio del siguiente artificio. Si hacemos $x' = x/a$ y $c' = c/a$, entonces la ecuación se convierte en

$$(1)\qquad b\sqrt{1-(x')^2} = \frac{-b(c'a)}{a^2\sqrt{1-(c')^2}}(x'-c')\cdot a + b\sqrt{1-(c')^2},$$

o, sencillamente

$$\sqrt{1-(x')^2} = \frac{-c'}{\sqrt{1-(c')^2}}(x'-c') + \sqrt{1-(c')^2}.$$

La solución al problema 11, hace ver que es $x' = c'$, con lo que es $x = c$.
Para la hipérbola, consideramos

$$f(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}.$$

Entonces

$$f'(x) = \frac{bx}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}},$$

con lo que si la tangente por $(c, b\sqrt{c^2/a^2-1})$ corta a la gráfica en x, entonces

$$(2)\qquad b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \frac{bc}{a^2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}}(x-c) + b\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\,.$$

Al elevar al cuadrado las ecuaciones (1) y (2) se obtiene el mismo resultado, con lo que las soluciones de (2) son también $x = c$.

13. No. Por ejemplo g podría ser $-f$.
Si $f(a) \neq 0$ y $f \cdot g$ y f son derivables en a, entonces g es derivable en a.

14. (a) Al ser f derivable en a, es continua en a. Al ser $f(a) \neq 0$, se sigue que $f(x) \neq 0$ para todos los x de un intervalo entorno de a. Así pues, $f = |f|$ o $f = -|f|$ en este intervalo, con lo que $|f|'(a) = f'(a)$ o $|f|'(a) = -f'(a)$ (Se puede también hacer uso de la regla de la cadena y del Problema 9-3: $|f| = \sqrt{f^2}$, con lo que

$$|f|'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)^2}} \cdot 2f(x)\,f'(x)$$
$$= f'(x) \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|}.)$$

(b) Pongamos $f(x) = x - a$.

(c) Esto deriva de la parte (a), ya que max $(f, g) = [f + g + |f - g|]/2$ y min $(f, g) = [f + g - |f - g|]/2$.

(d) Utilícese el mismo ejemplo que en la parte (b), poniendo $g = 0$.

15. La demostración es por inducción sobre n. Para $n = 1$, la fórmula de Leibnitz es el teorema 4. Supóngase que para un cierto n, la fórmula de Leibnitz se cumpla para todos los números a tales que $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$ existan. Supóngase que $f^{(n+1)}(a)$ y $g^{(n+1)}(a)$ existen. Entonces $f^{(n)}(x)$ y $g^{(n)}(x)$ tienen que existir para todo x en algún intervalo entorno de a. La fórmula de Leibnitz vale pues para todos estos x, es decir,

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

para todos los x de algún intervalo alrededor de a. Derivando y haciendo uso del teorema 4 obtenemos que

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} \cdot g^{(n-k)})'(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) \qquad \text{según el Problema 2-3(a).}
\end{aligned}$$

16. Las fórmulas

$$\begin{aligned}
&(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),\\
&(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot [g'(x)]^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x),\\
&(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x)) \cdot [g'(x)]^3 + 2f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x),
\end{aligned}$$

nos llevan a la siguiente conjetura: Si $f^{(n)}(g(a))$ y $g^{(n)}(a)$ existen, entonces $(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe y es una suma de términos de la forma

$$c \cdot [g'(a)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(a)]^{m_n} \cdot f^{(k)}(g(a)),$$

siendo c un número, $m_1, \ldots, m_n$ enteros no negativos y k un número natural menor o igual que n. Para demostrar esto por inducción, obsérvese que se cumple para $n = 1$ (con $a = m_1 = k = 1$). Supóngase ahora que para un cierto n, esta afirmación es válida para todos los números a tales que $f^{(n)}(g(a))$ y $g^{(n)}(a)$ existan. Supóngase que existen $f^{(n+1)}(g(a))$ y $g^{(n+1)}(a)$. Entonces $g^{(k)}(x)$ debe existir para todos los $k \leqslant n$ y todos los x de algún intervalo alrededor de a, y $f^{(k)}(y)$ debe existir para todos los $k \leqslant n$ y todos los y de algún intervalo alrededor de $g(a)$. Al ser g continua en a, esto implica que $f^{(k)}(g(x))$ existe para todos los x de algún intervalo alrededor de a. De este modo la afirmación es válida para todos estos x, es decir, $(f \circ g)^{(n)}(x)$ es una suma de términos de la forma

$$c \cdot [g'(x)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(x)]^{m_n} \cdot f^{(k)}(g(a)), \qquad m_1, \ldots, m_n \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

En consecuencia, $(f \circ g)^{(n+1)}(a)$ es una suma de términos de la forma

$$c \cdot m_\alpha [g'(a)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [g^{(\alpha)}(a)]^{m_\alpha - 1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(a)]^{m_n} \cdot f^{(k)}(g(a)) \qquad m_\alpha > 0$$

o

$$c \cdot [g'(a)]^{m_1+1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(a)]^{m_n} \cdot f^{(k+1)}(g(a)).$$

17. (a) Podemos poner

$$g(x) = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \ldots + \frac{a_1 x^2}{2} + a_0 x + c$$

para un número c.

(b) Póngase

$$g(x) = \frac{b_2 x^{-1}}{-1} + \frac{b_3 x^{-2}}{-2} + \ldots + \frac{b_m x^{-m+1}}{-m+1}.$$

(c) No, la derivada de f es

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 - \frac{b_1}{x^2} - \frac{2b_2}{x^3} - \ldots - \frac{m b_m}{x^{m+1}}.$$

18. (a) Sea g una función polinómica de grado $n-1$ con $n-1$ raíces (lo mismo que en el Problema 4-7(d)); entonces $g = f'$ para alguna función polinómica f de grado n (Problema 17).

(b) Procédase como en la parte (a), partiendo de una función polinómica g de grado $n-1$ sin raíces (téngase en cuenta que $n-1$ es par).

(c) Podemos proceder como en la parte (a), o bien observar simplemente que $f(x) = x^n$ tiene la propiedad deseada.

(d) Procédase como en la parte (a), partiendo de una función polinómica g de grado $n-1$ con k raíces (tal función existe, según el Problema 7-4).

19. (a) Si a es una raíz doble de f, de tal modo que $f(x) = (x-a)^2 g(x)$, entonces $f'(x) = (x-a)^2 g'(x) + 2(x-a)g(x)$, con lo que $f'(a) = 0$. Recíprocamente, si $f(a) = 0$ y $f'(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para algún g, y $f'(x) = (x-a)g'(x) + g(x)$, con lo que $0 = f'(a) = g(a)$; así pues, $g(x) = (x-a)h(x)$, con lo que $f(x) = (x-a)^2 h(x)$.

(b) La única raíz de $0 = f'(x) = 2ax + b$ es $x = -b/2a$, de modo que f tiene una raíz doble si y sólo si

$$0 = f(-b/2a) = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + c,$$

o $b^2 - 4ac = 0$. Geométricamente, ésta es precisamente la condición para que la gráfica de f toque al eje horizontal en el único punto $-b/2a$ (compárese con la figura 22 del problema 9-20.)

20. Puesto que $d'(x) = f'(x) - f'(a)$, tenemos $d'(a) = 0$. Así pues, a es raíz doble de d.

21. (a) Está claro que f tendrá que ser de la forma

$$f(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)^2(ax + b)$$

(ya que cada x_j, $j \neq i$ es una raíz doble según el problema 19). Basta por lo tanto demostrar que a y b pueden elegirse de modo que $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$. Si ponemos f en la forma $f(x) = g(x)(ax + b)$, debemos resolver entonces

$$[g(x_i)x_i] \cdot a + g(x_i) \cdot b = a_i$$

$$[g'(x_i)x_i + g(x_i)] \cdot a + g'(x_i) \cdot b = b_i.$$

Será siempre posible resolver estas ecuaciones, ya que

$$[g(x_i)x_i] \cdot g'(x_i) - [g'(x_i)x_i + g(x_i)]\, g(x_i) = [g(x_i)]^2 \neq 0.$$

(b) Siendo f_i la función construida en la parte (a), tómese

$f = f_1 + \ldots + f_n$.

22. (a) Si $g(a)$ y $g(b)$ tuviesen signos distintos, entonces $g(x)$ sería 0 para

algún x de (a, b), lo que implica que $f(x) = 0$, en contradicción con el hecho de que a y b son raíces consecutivas.

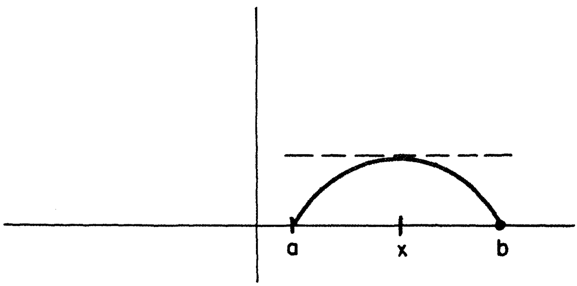
(b) Tenemos

$$f'(x) = (x - b)\,g(x) + (x - a)\,g(x) + (x - a)(x - b)\,g'(x),$$

con lo que

$$f'(a) = (a - b)\,g(a),$$
$$f'(b) = (b - a)\,g(b).$$

Al tener el mismo signo $g(a)$ y $g(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$ tienen signos distintos. Así pues, $f'(x) = 0$ para algún x de (a, b), ya que f' es una función continua.



(c) Puesto que

$$f'(x) = m(x - a)^{m-1}(x - b)^n g(x) + (x - a)^m n(x - b)^{n-1} g(x) + $$
$$+ (x - a)^m (x - b)^n g'(x),$$

tenemos

$$h(a) = m(a - b)\,g(a),$$
$$h(b) = n(a - b)g(b),$$

con lo que $h(a)$ y $h(b)$ tienen signos distintos y por lo tanto $h(x) = 0$ para algún x de (a, b), lo cual implica que $f'(x) = 0$.

23

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{hg(h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} g(h) = g(0) \qquad \text{ya que } g \text{ es continua en } 0.$$

24. Póngase

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0. \end{cases}$$

Entonces $f(x) = xg(x)$ para todo x, y

$$g(0) = f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} g(x),$$

con lo que g es continua en 0.

25. La demostración es por inducción sobre k. Para $k = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -nx^{-n-1} \\ &= (-1)^1 \frac{(n+1-1)!}{(1-1)!} x^{-n-1} \qquad \text{para } x \neq 0. \end{aligned}$$

Supóngase que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} x^{-n-k} \qquad \text{para } x \neq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k \frac{(-n-k)(n+k-1)!}{(k-1)!} x^{-n-k-1} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(n+k)!}{(k-1)!} x^{-n-(k+1)} \qquad \text{para } x \neq 0. \end{aligned}$$

26. Si $x = f(x)\,g(x)$, entonces $1 = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$. En particular $1 = f'(0)\,g(0) + f(0)\,g'(0) = 0$, lo cual es absurdo.

27. (a) Haciendo uso del problema 25 y de la regla de la cadena, obtenemos

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} (x-a)^{-n-k} \qquad \text{para } x \neq a.$$

(*b*) Al ser

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1},$$

obtenemos, aplicando la parte (a),

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{2(k-1)!} [(x-1)^{-n-k} - (x+1)^{-n-k}].$$

28, 29. Las fórmulas

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^m \operatorname{sen} \frac{1}{x},\\
f'(x) &= mx^{m-1} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^{m-2} \cos \frac{1}{x},\\
f''(x) &= m(m-1)x^{m-2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - mx^{m-3} \cos \frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3} \cos \frac{1}{x} -\\
&\qquad - x^{m-4} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\\
&= m(m-1)x^{m-2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} + (2-2m)x^{m-3} \cos \frac{1}{x} - x^{m-4} \operatorname{sen} \frac{1}{x},\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)x^{m-3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - m(m-1)x^{m-4} \cos \frac{1}{x} +\\
&\qquad + (m-3)(2-2m)x^{m-4} \cos \frac{1}{x} + (2-2m)x^{m-5} \operatorname{sen} \frac{1}{x} -\\
&\qquad - (m-4)x^{m-5} \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^{m-6} \operatorname{eos} \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

sugieren la siguiente conjetura: Si $f(x) = x^m \operatorname{sen} 1/x$, para $x \neq 0$, entonces

$$f^{(k)}(x) = ax^{m-k} \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \sum_{\ell=k+1}^{2k-1} \left(a_\ell x^{m-\ell} \operatorname{sen} \frac{1}{x} + b_\ell x^{m-\ell} \cos \frac{1}{x} \right)$$
$$\pm \begin{cases} x^{m-2k} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & k \text{ par} \\[2ex] x^{m-2k} \cos \dfrac{1}{x}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

para ciertos números a, a_ℓ, b_ℓ. Una vez llegados a esta conjetura, resulta fácil comprobar su validez por inducción. En efecto, al derivar el primer término se obtiene

$$a(m-k)x^{m-(k+1)} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - ax^{m-(k+2)} \cos \frac{1}{x},$$

y la segunda mitad de esta expresión puede incorporarse a la suma $\sum\limits_{\ell=k+2}^{2k+1}$ que aparece en la expresión buscada de $f^{(k+1)}(x)$. Análogamente, al derivar el último término se obtiene

$$\begin{cases} \pm\,(m-2k)x^{m-(2k+1)}\ \text{sen}\ \dfrac{1}{x} \mp x^{m-2(k+1)}\cos\dfrac{1}{x}, & k \text{ par} \quad (k+1 \text{ impar}) \\ \pm\,(m-2k)x^{m-(2k+1)}\cos\dfrac{1}{x} \pm x^{m-2(k+1)}\ \text{sen}\ \dfrac{1}{x}, & k \text{ impar } (k+1 \text{ par}), \end{cases}$$

y la primera mitad de cada expresión puede incorporarse a la suma $\sum\limits_{\ell=k+2}^{2k+1}$.

Finalmente, cada uno de los términos que aparecen en la suma $\sum\limits_{\ell=k+1}^{2k-1}$ proporciona al derivar, dos términos que pueden ser incorporados a la nueva suma $\sum\limits_{\ell=k+2}^{2k+1}$.

Se sigue, en particular, que si $m = 2n$, entonces $f^{(k)}(x)$ tiene siempre un factor de por lo menos x^2 para $k < n$ (estando el factor restante acotado en un intervalo alrededor de 0). De este modo, si definimos $f(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0, \quad \text{ya que } f(h) \text{ tiene un factor de por lo menos } h^2; \end{aligned}$$

en consecuencia, si $2 \leqslant n$, entonces

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h} = 0, \quad \text{ya que } f'(h) \text{ tiene un factor de por lo menos } h^2; \end{aligned}$$

en consecuencia, si $3 \leqslant n$, entonces $f'''(0) = 0$, etc. Este razonamiento (que en realidad no es sino otro razonamiento inductivo) demuestra que $f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$. Por otra parte, $f^{(n)}(x)$ es una suma de términos que tienen un factor de por lo menos x^2, junto con $\pm$ sen $1/x$ o $\pm \cos 1/x$, con lo que $f^{(n)}$ *no* es continua en 0.

Si $m = 2n + 1$, entonces $f^{(k)}(x)$ tiene siempre un factor de por lo menos x^2 para $k < n$, de modo que $f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$, pero $f^{(n)}(x)$ es una suma de términos que tienen un factor de por lo menos x^2, junto con $\pm\, x \cos 1/x$ o $\pm\, x$ sen $1/x$. De esto se deduce que $f^{(n)}$ es continua, pero no derivable, en 0.

30. (ii) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = (\cos\ y) \cdot (-\operatorname{sen}\ x) = \cos(\cos\ x) \cdot (-\operatorname{sen}\ x).$

(iv) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dv} \cdot \dfrac{dv}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (\cos\ v)(-\operatorname{sen}\ u)(\cos\ x) = \cos(\cos(\operatorname{sen}\ x)) \cdot$

$\cdot (-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\ x)) \cdot \cos\ x.$

CAPÍTULO 11

1. (ii) $f'(x) = 5x^4 + 1 = 0$ para ningún x;

   $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$;

   máximo $= 3$, mínimo $= -1$.

   (iv) $f'(x) = -\dfrac{(5x^4 + 1)}{(x^5 + x + 1)^2} = 0$ para ningún x;

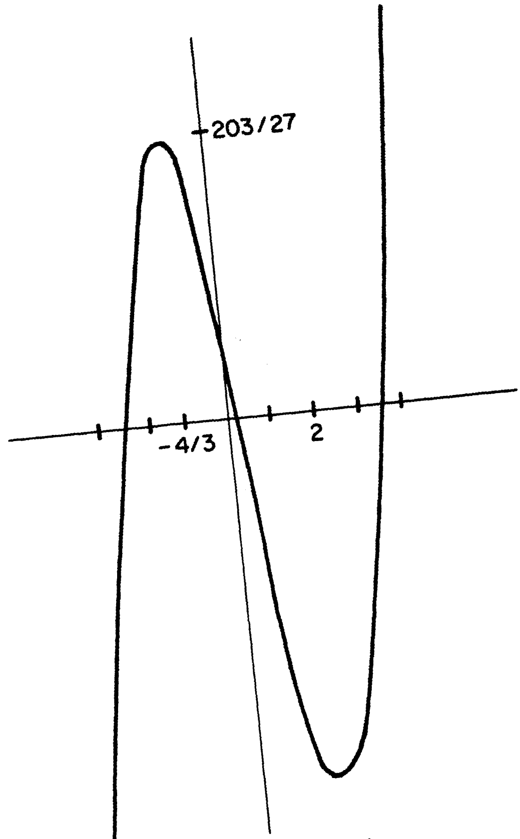
   $f(-1/2) = 32/15$, $f(1) = 1/3$;

   máximo $= 32/15$, mínimo $= 1/3$.

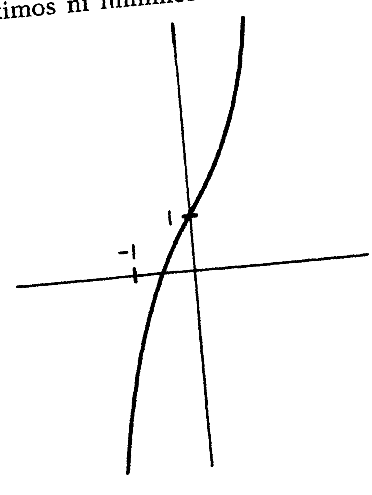
   (Obsérvese que $g(x) = x^5 + x + 1$ es creciente, puesto que $g'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ para todo x; al ser $g(-1/2) = 15/32 > 0$, esto demuestra que $g(x) \neq 0$ para todo x de $[-1/2, 1]$, con lo que f es derivable en $[-1/2, 1]$.)

   (vi) f no es acotada ni superior ni inferiormente en $[0, 5]$.

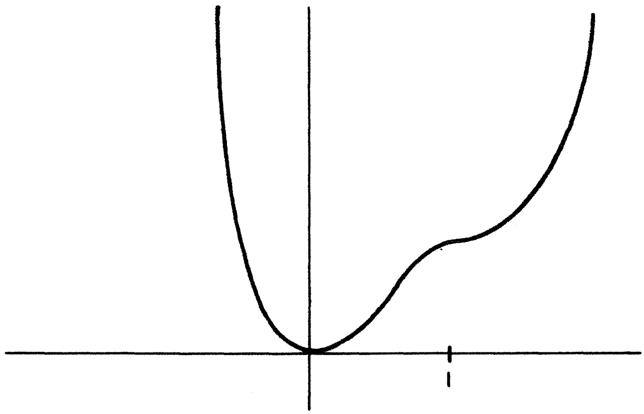
2. (i) $-4/3$ es un máximo local, y 2 un mínimo local.



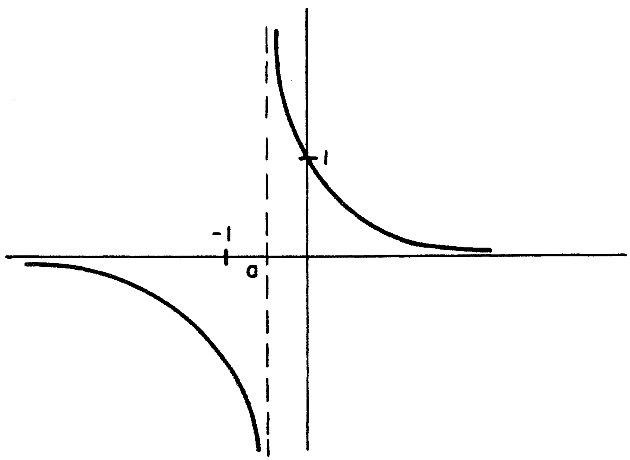
(ii) No existen máximos ni mínimos locales.



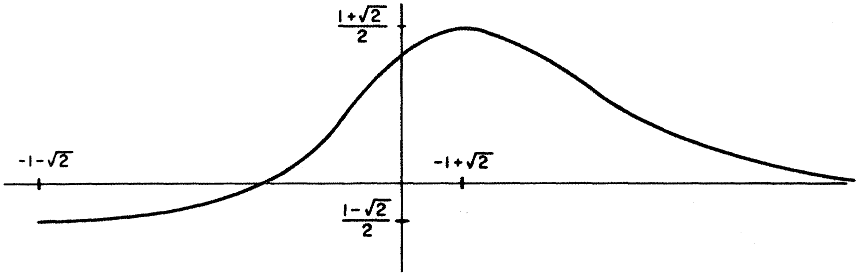
(iii) 0 es un mínimo local, y no hay máximos locales.



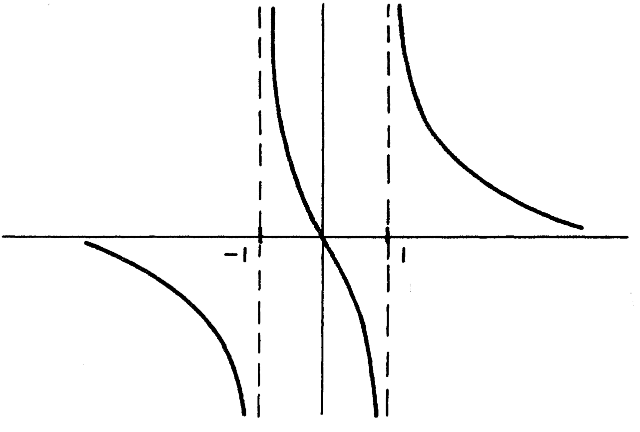
(iv) No hay máximos ni mínimos locales.
En la figura que sigue, a es la raíz única de $x^5 + x + 1 = 0$.



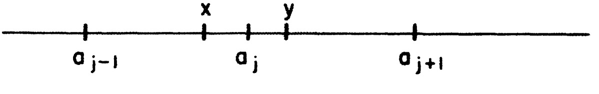
(v) $-1 + \sqrt{2}$ es un máximo local, y $-1 - \sqrt{2}$ es un mínimo local.



(vi) No hay máximos ni mínimos locales, ya que $f'(x) = -(1 + x^2)/(x^2 - 1)^2 < 0$ para $x \neq \pm 1$.



3. (b) Supóngase que x e y son puntos de $[a_{j-1}, a_j]$ y de $[a_j, a_{j+1}]$ respectivamente, con $|x - a_j| = |y - a_j|$.



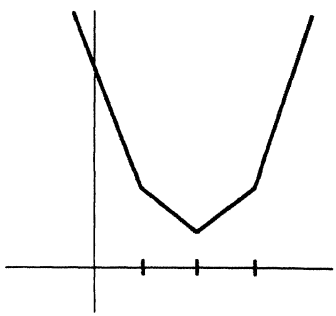
Entonces

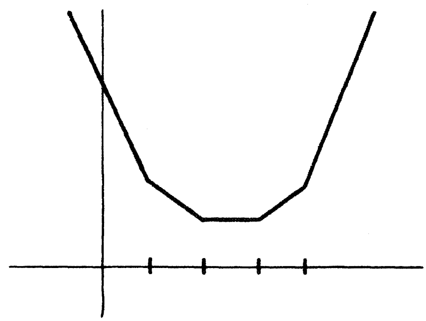
$$|y-a_i| = |x-a_i| + |y-x| \quad \text{para} \quad i \leqslant j-1,$$
$$|y-a_i| = |x-a_i| - |y-x| \quad \text{para} \quad i \geqslant j+1.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + |y-x| \cdot \{(j-1)-(n-j)\} \\ &= f(x) + |y-x| \cdot \{2j-n-1\}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que f decrece hasta que llega al «a_i más interior» y después crece. El mínimo se presenta en $a_{(n-1)/2}$ si n es impar y en todo el intervalo $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$ si n es par.





(c) Tenemos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & x<0 \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & 0<x<a \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x-a}, & a<x, \end{cases}$$

con lo que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0 \\[2ex] \dfrac{-1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a \\[2ex] \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & a<x. \end{cases}$$

Así pues, f crece en $(-\infty, 0]$ y decrece en $[a, \infty)$, con lo que el máximo de f en $[0, a]$ es el máximo en $\mathbf{R}$. Si $f'(x) = 0$ para x en $(0, a)$, entonces

$$(1 + x)^2 - (1 + a - x)^2 = 0,$$

cuya solución única es $x = a/2$. Puesto que

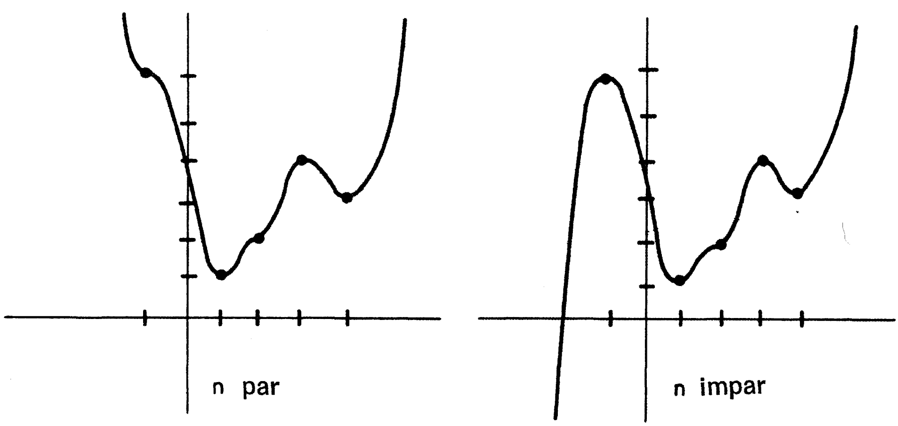
$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{4}{2 + a} < \frac{2 + a}{1 + a} = f(0) = f(a),$$

el máximo es $(2 + a)/(1 + a)$.

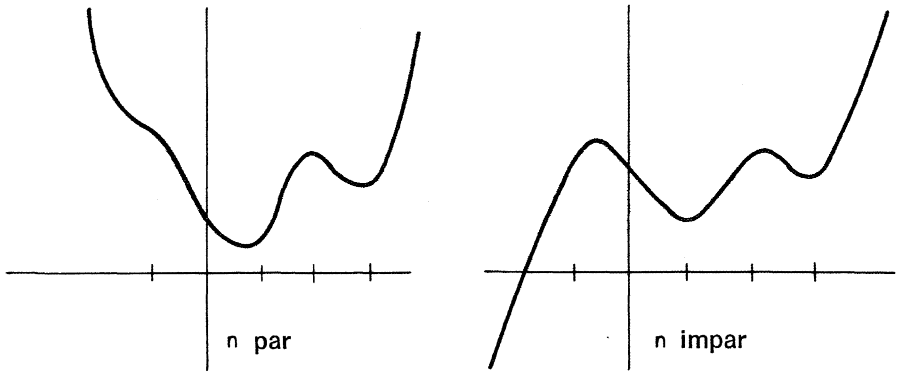
4. (ii) Todos los x irracionales son mínimos locales, y todos los x racionales son máximos locales.

(iv) Todos los $1/n$ con n en $\mathbf{N}$ son máximos locales y todos los demás x son mínimos locales.

9.



10. (a) 1 es un mínimo local, y 2 es un máximo local. La naturaleza de los puntos críticos -1 y 3 puede determinarse por el comportamiento de $f(x)$ para valores grandes de $|x|$:

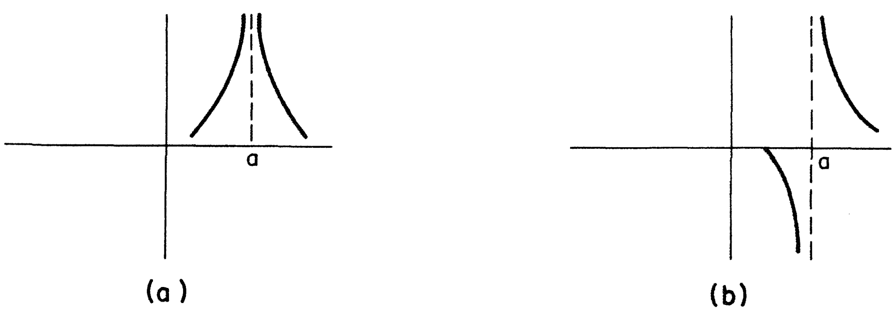


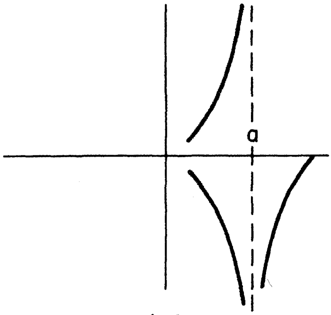
(b) No, ya que si 2 fuese el punto crítico mayor, entonces f tendría que ser decreciente en $(3, \infty)$, puesto que 2 es un máximo local.

11. Sea $f(x) = r(x)/s(x)$, siendo r y s funciones polinómicas. Es posible que r y s tengan una raíz común a, pero en este caso $r(x) = (x - a)r_1(x)$ y $s(x) = (x - a)s_1(x)$ para ciertas funciones polinómicas r_1 y s_1 (problema 3-7). Esto significa que $f(a)$ no está definido, pero que es $f(x) = r_1(x)/s_1(x)$ para $x \neq a$ (y $s_1(x) \neq 0$). Una vez sacados fuera todos los factores lineales comunes a r y a s, la gráfica de f resulta ser igual, salvo en un número finito de puntos, a la gráfica de

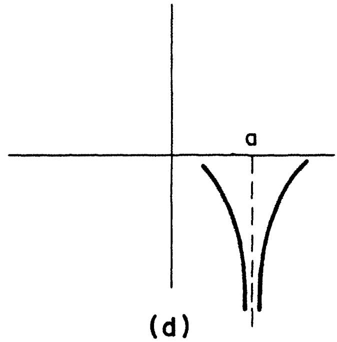
$$g(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q no tienen raíces comunes. La función g está definida en todos los puntos a, excepto en aquellos en que es $q(a) = 0$ (de los cuales existen a lo sumo m). En las proximidades de tales puntos, la gráfica es semejante a uno de los tipos (a), (b), (c) o (d), indicados en la figura que sigue,





(c)



(d)

dependiendo ello del signo de $p(a)$ y de si a es un máximo o mínimo local para q o de si q es creciente o decreciente en un intervalo alrededor de a. Puesto que

$$g'(x) = \frac{q(x)\,p'(x) - p(x)\,q'(x)}{[q(x)]^2}$$

y que $qp' - pq'$ es una función polinómica de grado a lo sumo $m + n$, existen a lo más $m + n$ máximos y mínimos locales. En los intervalos entre estos puntos y los puntos de discontinuidad, g es o bien creciente o bien decreciente. El comportamiento de $g(x)$ para valores grandes de x, positivos o negativos, ya ha sido tratado en los problemas 5-30 y 5-32.

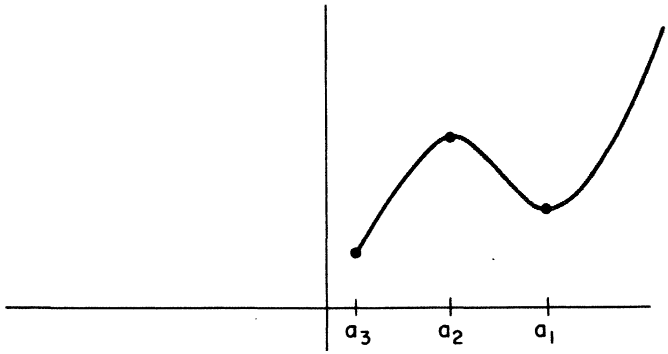
12. (a) Esto es una consecuencia del problema 3-7 y del hecho de que el grado de la diferencia de las dos funciones polinómicas es a lo sumo max (m, n).

    (b) Si $m \geqslant n$, sea f_1 una función polinómica con m raíces y sean $f(x) = f_1(x) + x^n$ y $g(x) = x^n$.

13. (a) La función polinómica f', de grado $n - 1$, tiene k raíces, y carece de raíces múltiples, ya que es $f''(x) \neq 0$ cuando $f'(x) = 0$. Se sigue del problema 7-4 que $n - 1 - k$ es impar.

    (b) Al ser par $n - 1 - k$, existe una función polinómica g de grado $n - 1$ con exactamente k raíces. Tómese f como una función polinómica de grado n con $f' = g$ (problema 10-17).

    (c) Sea $\ell = k_1 + k_2$ y sean $a_\ell < a_{\ell-1} < \ldots < a_1$ todos los máximos y mínimos locales. En los intervalos entre estos puntos, f es o bien creciente o bien decreciente. Al ser $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, la función f debe ser creciente en (a_1, ∞). Por lo tanto a_1 debe ser un mínimo local. En consecuencia, f debe ser decreciente en (a_2, a_1), lo cual demuestra que a_2 debe ser un máximo local.



Siguiendo de esta manera, vemos que a_k es un mínimo local si k es impar y un máximo local si k es par.

Pero si n es par, entonces a_ℓ debe ser un mínimo local, ya que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Así pues, ℓ tiene que ser impar, con lo que $a_1, a_3, \ldots, a_\ell$ serán los mínimos locales y $a_2, \ldots, a_{\ell-1}$ los máximos locales. En consecuencia, $k_2 = k_1 + 1$. Si n es impar, entonces a tiene que ser un máximo local, ya que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. El mismo tipo de razonamiento hace ver en este caso que es $k_1 = k_2$.

(d) Las hipótesis implican que $n - 1 - (k_1 + k_2)$ es par. Sea $\ell = [n - 1 - (k_1 + k_2)]/2$, y elíjase una función polinómica f de grado n con f' de la forma indicada en la ayuda. Al ser $(1 + x^2)^\ell > 0$ para todo x, se sigue que $f'(x) > 0$ para $x > a_{k_1+k_2}$ y que el signo de f' cambia al pasar de (a_{i-1}, a_i) a (a_{i-2}, a_{i-1}). Así pues, $a_{k_1+k_2}, a_{k_1+k_2-2}, \ldots$ son mínimos locales y $a_{k_1+k_2-1}, a_{k_1+k_2-3}, \ldots$ son máximos locales.

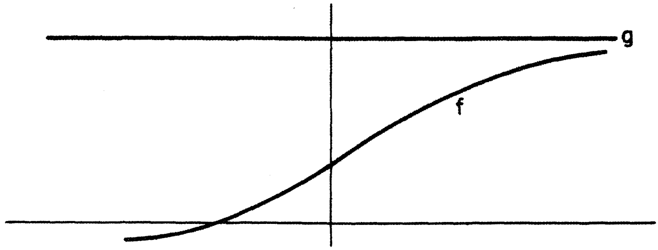
15. (a) Aplíquese el teorema del valor medio a $f - g$: Si $x > a$, tenemos

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - a} = \frac{f(x) - g(x) - [f(a) - g(a)]}{x - a}$$

$$= f'(y) - g'(y) > 0 \qquad \text{para algún } y \text{ de } (a, x).$$

Al ser $x - a > 0$, se sigue que $f(x) - g(x) > 0$. Análogamente, si $x - a < 0$, entonces $f(x) < g(x)$.

(b) Se indica un ejemplo a continuación



18. (a) La posición en el tiempo t es

$$((v \cos \alpha)t, -4{,}9t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)t).$$

Si $\cos \alpha = 0$, con lo que la bala es lanzada verticalmente, entonces estos puntos están todos sobre una recta. Si $\cos \alpha \neq 0$, entonces el conjunto de todos estos puntos es igual al conjunto de todos los puntos

$$(t, -\frac{4{,}9t^2}{v \cos \alpha} + (\tan \alpha)t),$$

con lo que la trayectoria de la bala estará sobre la gráfica de

$$f(x) = \frac{-4{,}9x^2}{v \cos \alpha} + (\tan \alpha)x,$$

que es la gráfica de una parábola.

(b) La bala toca el suelo en el tiempo $t > 0$ en que

$$0 = -4{,}9t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)t,$$

o $t = (v \operatorname{sen} \alpha)/4{,}9$ (por supuesto, consideramos sólo $\alpha > 0$). Ha recorrido una distancia horizontal de

$$d(\alpha) = (v \cos \alpha) \cdot \frac{v \operatorname{sen} \alpha}{4{,}9} = \frac{v^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{4{,}9}.$$

Resulta ahora que $d(\alpha)$ es máximo para un α tal que

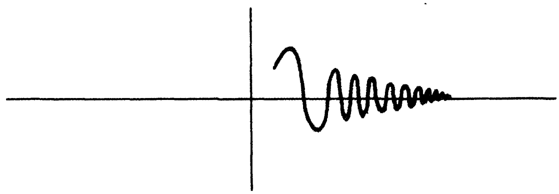
$$0 = d'(\alpha) = \frac{v^2}{4{,}9}[\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha],$$

con lo que $\tan \alpha = \pm 1$. Puesto que estamos considerando solamente α positivo, resultará que α es un ángulo de 45 grados.

19. (a) Queda indicada más abajo una función que reúne estas condiciones. Como ejemplo explícito podemos tomar $f(x) = (\text{sen } x^2)/x$. Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pero

$$f'(x) = \frac{2x^2 \text{ sen } x^2 - \text{sen } x^2}{x^2}$$
$$= 2 \text{ sen } x^2 - \frac{\text{sen } x^2}{x^2},$$

con lo que $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no existe.



(b) Sea $\ell = \lim_{x\to\infty} f'(x)$. Si $\ell > 0$, entonces existiría algún N tal que $|f'(x) - \ell| < |\ell|/2$ para $x > N$. Esto implicaría que $f'(x) > |\ell|/2$. Pero esto implicaría también, según el teorema del valor medio, que

$$f(x) > f(N) + \frac{(x - N)|\ell|}{2} \qquad \text{para } x > N,$$

lo que significaría que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no existe. Análogamente, tampoco puede ser $\lim_{x\to\infty} f'(x) < 0$.

(c) Sea $\ell = \lim_{x\to\infty} f''(x)$. Si $\ell > 0$, entonces, lo mismo que en la parte (a), tenemos $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. Una nueva aplicación del teorema del valor medio hace ver que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, en contradicción con la hipótesis. De manera análoga se ve que tampoco puede ser $\lim_{x\to\infty} f''(x) < 0$.

(d) Una demostración análoga hace ver que si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x)$, existen, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \dots = \lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$.

20. Si $g(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), entonces la función $h(x) = f(x)/g(x)$ es derivable en (a, b), y por hipótesis

$$h'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} = 0.$$

Esto significa que f/g es constante en (a, b), con lo que $f = c \cdot g$ en (a, b) para algún $c \neq 0$. Al ser f y g continuas, se sigue que $f(a) = c \cdot g(a)$, con lo que $g(a) = 0$, en contradicción con la hipótesis.

21. Tenemos

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Ahora bien,

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leqslant (x - y)^{n-1},$$

y $\lim_{y \to x} (x - y)^{n-1} = 0$, ya que es $n - 1 > 0$. En consecuencia, $f'(x) = 0$ para todo x, con lo que f es constante.

22. Sea

$$f(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

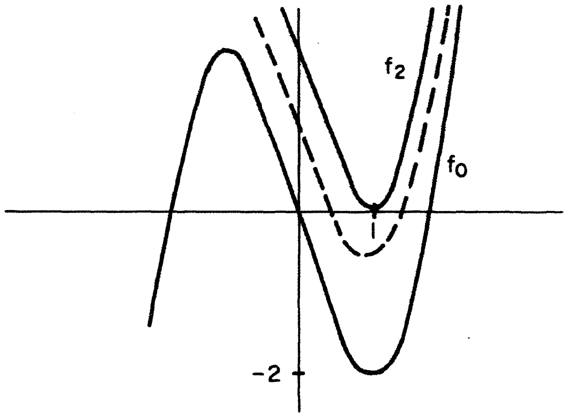
Entonces $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$ por hipótesis. El teorema de Rolle implica que para algún x de $(0, 1)$ tenemos

$$0 = f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

23. Si $f_m(x_0) = f_m(x_1) = 0$ para $x_0 < x_1$ de $[0, 1]$, entonces $f'_m(x) = 0$ para algún x que está en (x_0, x_1) y que por lo tanto satisface $0 < x < 1$. Pero

$$f'_m(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1),$$

con lo que es $f'_m(x) = 0$ solamente para $x = \pm 1$.



24. El problema 7-11 hace ver que hay por lo menos un x que satisface esta condición. Supóngase que hubiese dos, $x_0 < x_1$. El teorema del valor medio, aplicado a $[x_0, x_1]$, implicaría que

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

para algún x de $[x_0, x_1]$, en contradicción con la hipótesis.

25. Supóngase que $f''(x) < 4$ para todo x de $[0, 1/2]$. Entonces, por el teorema del valor medio, para todo x de $[0, 1/2]$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= f''(x') \qquad \text{para algún } x' \text{ de } [0, x] \\ &< 4, \end{aligned}$$

con lo que $f'(x) < 4x$. Aplicando de nuevo el teorema del valor medio, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= f'(x') \qquad \text{para algún } x' \text{ de } (0, x) \\ &< 4x' < 4x, \end{aligned}$$

con lo que $f(x) < 4x^2$. En consecuencia $f(1/2) < 1/2$.

El mismo tipo de análisis puede aplicarse a f en $[1/2, 1]$ si $f''(x) < -4$ para todo x $[0, 1/2]$. Algo más conveniente resulta introducir la función $g(x) = 1 - f(1-x)$, la cual satisface $g(0) = 0$ y $g''(x) = -f''(1-x) < 4$ cuando x está en $[0, 1/2]$. Según acabamos de ver

$$1/2 > g(1/2) = 1 - f(1/2),$$

con lo que $f(1/2) > 1/2$, en contradicción con el resultado antes hallado.

(El resultado de este problema puede ser en realidad reforzado: $|f''(x)| > 4$ para algún x de $[0, 1]$. Para demostrar esto observamos primero que no podemos tener a la vez $f''(x) = 4$ para $0 < x < 1/2$ y $f''(x) = -4$ para $1/2 < x \leqslant 1$, ya que esto implicaría que $f'(x) = 4x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ y $f'(x) = -4x$ para $1/2 \leqslant x \leqslant 1$, en cuyo caso no existiría $f''(1/2)$. Por otra parte, si tenemos $f''(x) \leqslant 4$ para todo x de $(0, 1/2)$ pero $f''(x) < 4$ para un x por lo menos, entonces tenemos $f''(x) < 4x$ para un x por lo menos y en consecuencia para todos los x mayores a éste en $(0, 1/2)$ de donde será $f(x) < 4x^2$ para todos estos x, con lo que $f(1/2) < 1/2$; si tuviéramos también $f''(x) \geqslant -4$ para todo x de $(1/2, 1)$, entonces $f(1/2) \geqslant 1/2$, lo cual es una contradicción.)

26. Si $g(x) = f(xy)$, entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= y \cdot f'(xy) \\ &= y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} = f'(x). \end{aligned}$$

Existe, pues, un número c tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x > 0$. Tenemos ahora

$$f(y) = g(1) = f(1) + c = c,$$

con lo que $g(x) = f(x) + f(y)$.

27. Supongamos que $f(a) = f(b) = 0$. Si x es un máximo local de f en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ y $f''(x) \leqslant 0$; partiendo de la ecuación

$$f''(x) + f'(x)\,g(x) - f(x) = 0$$

podemos deducir que $f(x) \leqslant 0$. Análogamente, f no puede tener un mínimo local negativo en (a, b).

28. Si $f(x_i) = 0$ para $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, entonces $f'(x) = 0$ para algún x de cada uno de los n intervalos (x_i, x_{i+1}). En consecuencia $f''(x) = 0$ para $n - 1$ números x, etc. (Es decir, tenemos la base para una prueba por inducción.)

30. Esto es una consecuencia trivial del teorema del valor medio, ya que si definimos

$$g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{y \to a^+} f(y), & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ \lim\limits_{y \to b^-} f(y), & x = b, \end{cases}$$

entonces g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $g'(x) = f'(x)$ para los x de (a, b), por lo que existirá algún x en (a, b) con

$$f'(x) = g'(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

31. Tenemos

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x) = f'(x)\, [g(b) - g(a)].$$

Si $g'(x) = 0$, entonces $f'(x)[g(b) - g(a)] = 0$. Pero esto contradice el supuesto de ser $g(b) \neq g(a)$, y el hecho de que $f'(x) \neq 0$ (ya que $g'(x) = 0$).

32. Sea

$$h(x) = f(x)\, g(b) + g(x)\, f(a) - f(x)\, g(x).$$

Entonces

$$h(a) = h(b) = f(a)\, g(b),$$

con lo que, por el teorema de Rolle, existe algún x en (a, b) con

$$0 = h'(x) = f'(x)\, g(b) + g'(x)\, f(a) - f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x),$$

o

$$f'(x)\, [g(b) - g(x)] = g'(x)\, [f(x) - f(a)].$$

Al ser $g'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), tenemos también $g(b) \neq g(x)$ para x en (a, b) (de otro modo el teorema de Rolle, aplicado al intervalo $[x, b]$, implicaría que $g'(x) = 0$ para algún x' de (x, b)).

35. Puesto que es $g(0) = 0$ y g es continua en 0, tenemos que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Por lo tanto, por la regla de l'Hôpital

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{2x} = g''(0) = \frac{17}{2}.$$

(El límite $\lim\limits_{x \to 0} g'(x)/2x$ podría también hallarse por la regla de l'Hôpital.)

36. (a) Utilícese exactamente la misma demostración que para la regla de l'Hôpital pero considerando solamente que x está en $(a, a + \delta)$ o en $(a - \delta, a)$, respectivamente.

(b) De nuevo será aplicable la demostración del teorema de l'Hôpital, casi palabra por palabra. (Se presenta la tentación de aplicar la regla de l'Hôpital a g/f: Puesto que $\lim\limits_{x \to a} g'(x)/f'(x) = 0$, se sigue que $\lim_{x \to a} g(x)/f(x) = 0$. Por desgracia, esto solamente implica que $\lim_{x \to a} |f(x)/g(x)| = \infty$.)

(c) Al ser $\lim_{x \to 0^+} f(1/x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} g(1/x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$, la parte (a) implica que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(1/x^2)f'(1/x)}{-(1/x^2)g'(1/x)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

(d) Análogo a la parte (c), utilzando el caso $x \to a^+$ de la parte (b) en lugar del de la parte (a).

37. (a) Para todo $\epsilon > 0$ existe un a tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \epsilon \qquad \text{para } x \geqslant a.$$

Esto significa, en particular, que $g'(x) \neq 0$ para $x > a$; se sigue que $g(x) - g(a) \neq 0$ para $x > a$ (según el teorema de Rolle). Por lo tanto, el teorema del valor medio de Cauchy puede ponerse en la forma

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x')}{g'(x')} \qquad \text{para algún } x' \text{ de } (a, x).$$

Puesto que es $x' > a$, se deduce la desigualdad deseada.

(b) Tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)},$$

donde $f(x) - f(a) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ cuando x es suficientemente grande, ya que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$. Estos límites implican también que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} = 1.$$

Se sigue que $f(x)/g(x)$ puede aproximarse tanto como se quiera a $[f(x) - f(a)]/[g(x) - g(a)]$ sin más que hacer x suficientemente grande. Junto con la parte (a), esto hace ver que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < 2\epsilon \text{ cuando } x \text{ es suficientemente grande.}$$

38. En los problemas siguientes haremos uso de otra forma del teorema de l'Hôpital: Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = \infty$. entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \infty$. Para demostrar esto, aplíquese el problema 37 a g/f: Al ser $\lim_{x\to\infty} g'(x)/f'(x) = 0$, tenemos $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x) = 0$. Esto implica (según hicimos notar en la solución al problema 36) que $\lim_{x\to\infty} |f(x)/g(x)| = \infty$. Al ser $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, podemos concluir que $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \infty$.

39. (a) Al ser a un mínimo de f en $[a, b]$, para todos los $h > 0$ suficientemente pequeños, tenemos

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0;$$

esto implica que $f'(a) \geqslant 0$. La demostración de que es $f'(b) \leqslant 0$ es análoga.

(b) La parte (a) hace ver que no podemos tener el mínimo de f en a o en b, ya que suponemos que $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$. Así pues, el mínimo se presenta en algún punto x de (a, b). Entonces es $f'(x) = 0$.

(c) Sea $g(x) = f(x) - cx$. Entonces $g'(a) = f'(a) - c < 0$ y $g'(b) = f'(b) - c > 0$. Así pues, por la parte (b), $0 = g'(x) = f'(x) - c$ para algún x de (a, b).

40. Si $f(a) \neq 0$, entonces la continuidad de f implica que $f = |f|$ o $f = -|f|$ en algún intervalo alrededor de a, con lo que f será derivable en a. Si $f(a) = 0$, entonces a es un mínimo de $|f|$, con lo que $|f|'(a) = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)|}{h} \end{aligned}$$

Esta ecuación dice también que $f'(a) = 0$.

41. (a) Si $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \neq 0$, entonces el teorema de Rolle implicaría que $0 = f'(x) = nx^{n-1} - n(x+y)^{n-1}$ para algún x de $(0, x_0)$ o de $(x_0, 0)$. Pero esto significa que $x^{n-1} = (x+y)^{n-1}$ para $y \neq 0$, lo cual es imposible, ya que $g(x) = x^{n-1}$ es creciente ($n - 1$ es impar).

(b) Sea $f(x) = x^n + y^n - (x+y)^n$. Entonces $f(0) = f(-y) = 0$. Si f fuese cero en tres puntos $a < b < c$, entonces el teorema de Rolle podría aplicarse a $[a, b]$ y $[b, c]$ para demostrar que existen dos números x con

$$0 = f'(x) = nx^{n-1} - n(x+y)^{n-1};$$

pero esta ecuación se cumple solamente para $x = -(x+y)$, o $x = y/2$ (problema 1-7).

42. La tangente por (a, a^n) es la gráfica de

$$\begin{aligned} g(x) &= na^{n-1}(x-a) + a^n \\ &= na^{n-1}x + (1-n)a^n. \end{aligned}$$

Si $g(x_0) = f(x_0)$ para algún $x_0 \neq a$, entonces el teorema de Rolle puede aplicarse a $g - f$ en el intervalo $[a, x_0]$, o $[x_0, a]$:
$0 = g'(x) - f'(x) = na^{n-1} - nx^{n-1}$ para algún x de (a, x_0) o de (x_0, a).
Esto es imposible, ya que $x \neq a$ y $n-1$ es impar, por lo que $a^{n-1} \neq x^{n-1}$.

43. La tangente por $(a, f(a))$ es la gráfica de

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= f'(a)x + f(a) - af'(a). \end{aligned}$$

Si $g(x_0) = f(x_0)$ para algún $x_0 \neq a$, entonces
$0 = g'(x) - f'(x) = f'(a) - f'(x)$ para algún x de (a, x_0) o de (x_0, a).
Esto es imposible, ya que f' es creciente.

44. Al ser

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},$$

basta demostrar que

$$xf'(x) - f(x) > 0,$$

o

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x} \qquad \text{para} \quad x > 0.$$

Pero ahora el teorema del valor medio, aplicado a f en $[0, x]$, hace ver que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= f'(x') &&\text{para algún } x' \text{ de } [0, x] \\ &< f'(x), &&\text{ya que } f' \text{ es creciente.} \end{aligned}$$

45. Sea $g(x) = (1+x)^n - (1+nx)$. Entonces $g(0) = 0$, pero

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n.$$

Al ser $n - 1 \geqslant 0$ esto implica que:

$$g'(x) < 0 \qquad \text{para } -1 < x < 0,$$
$$> 0 \qquad \text{para } x > 0.$$

Así pues, $g(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y para $0 < x$.

46. (a) 0 es, en realidad, un mínimo en todo **R**, ya que $f(0) = 0$ y $f(x) \geqslant 0$ para todo x.

(b)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^4 \operatorname{sen}^2(1/h)}{h} = 0,$$

y

$$f'(h) = 4h^3 \operatorname{sen}^2(1/h) - 2h^2 \operatorname{sen}(1/h) \cos(1/h) \qquad \text{para } h \neq 0.$$

Así pues,

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{4h^3 \operatorname{sen}^2(1/h) - 2h^2 \operatorname{sen}(1/h)\cos(1/h)}{h}$$
$$= 0.$$

47. (a) Al ser f' continua, $f'(x) > 0$ para todos los x de algún intervalo alrededor de a, con lo que f es creciente en este intervalo.

(b) Tenemos

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Así pues, $g'(x) = 1$ cuando $\cos 1/x = 1$ (y en consecuencia $\operatorname{sen} 1/x = 0$), y $g'(x) = -1$ cuando $\cos 1/x = -1$.

(c) Tenemos $f'(x) = \alpha + g'(x)$, con lo que $f'(x) > 0$ cuando $g'(x) = 1$, y $f'(x) < 0$ cuando $g'(x) = -1$.

48 (a) Tenemos

$$g(y) = \frac{2 \operatorname{sen} y}{y} - \cos y,$$

con lo que

$$g'(y) = \frac{2y \cos y - 2 \operatorname{sen} y}{y^2} + \operatorname{sen} y.$$

Así pues, si $g'(y) = 0$, entonces

$$0 = 2y \cos y - 2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} y,$$

o

$$(1) \qquad \cos y = \frac{2 \operatorname{sen} y - y^2 \operatorname{sen} y}{2y} = \operatorname{sen} y \left(\frac{2-y^2}{2y}\right).$$

De aquí que

$$(2) \qquad g(y) = \frac{2 \operatorname{sen} y}{y} - \operatorname{sen} y \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)$$

$$= \operatorname{sen} y \left(\frac{2}{y} - \frac{2-y^2}{2y}\right)$$

$$= \operatorname{sen} y \left(\frac{2+y^2}{2y}\right).$$

(b) Además, por (1) tenemos

$$1 - \operatorname{sen}^2 y = \cos^2 y = \operatorname{sen}^2 y \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2,$$

con lo que

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-y^2}{2y}\right)^2} = \frac{4y^2}{4+y^4},$$

con lo que, por (2)

$$|g(y)| = |\operatorname{sen} y| \cdot \left|\frac{2+y^2}{2y}\right|$$

$$= \frac{|2y|}{\sqrt{4+y^4}} \cdot \frac{2+y^2}{|2y|} = \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}}.$$

(c) Tenemos

$$f'(x) = 1 + g(1/x).$$

Pero ahora tenemos claramente que $g(y) < 0$ para valores de y tan grandes como se quiera (ya que $g(y)$ es prácticamente $-\cos y$ para valores grandes de y), así que para valores de y tan grandes como se quiera, tenemos

$$g(y) < -\frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}} < -1$$

por la parte (b). Así pues, $f'(x) < 0$ para valores de x tan pequeños como se quiera y al mismo tiempo $f'(x) > 0$ también para valores de x tan pequeños como se quiera.

(d) Tenemos

$$f'(x) = \alpha + g(1/x).$$

Para valores suficientemente grandes de y tenemos $g(y) > -\alpha$. Así que para valores suficientemente pequeños de x tenemos $f'(x) > 0$.

49. (a) Si el mínimo de f en $[b, 1]$ se presentara en algún c con $b < c \leqslant 1$, entonces claramente f no sería creciente en c, ya que tendríamos $f(x) \geqslant f(c)$ para todos los $x < c$ suficientemente próximos a c. Pero ahora, si $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, entonces el mínimo de f en $[a, 1]$ es a, con lo que $f(a) \leqslant f(b)$. Para obtener la desigualdad estricta $f(a) < f(b)$, tómese un a' con $a < a' < b$ tal que $f(a') > f(a)$ (esto es posible por ser f creciente en a); entonces es $f(a) < f(a') \leqslant f(b)$.

(b) Sea $\alpha = \sup S_b$. Si $b \leqslant y < \alpha$, existe entonces un x en S_b con $y < x$. Por lo tanto, $f(y) \geqslant f(b)$. Además, al ser f creciente en α, tenemos $f(\alpha) > f(x)$ para $x < \alpha$ suficientemente próximo a α, con lo que $f(\alpha) > f(b)$. Esto demuestra que α está en realidad en S_b. Pero si fuese $\alpha < 1$, existiría un $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(\alpha)$, para $\alpha < x < \alpha + \delta$. Esto demuestra que todos estos x están en S_b, en contradicción con el hecho de ser $\alpha = \sup S_b$. Así pues, $\alpha = \sup S_b = 1$. Por lo tanto, $f(y) \geqslant f(b)$ para todo $y \geqslant b$.

(c) Para valores de h suficientemente pequeños tenemos

$$\begin{aligned} f(a+h) &> f(a) \qquad \text{si } h > 0, \\ f(a+h) &< f(a) \qquad \text{si } h < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0,$$

lo cual implica que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0.$$

(d) Al ser $f'(a) > 0$ tenemos, para valores de h suficientemente pequeños, que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0.$$

Esto implica que $f(a+h) > f(a)$ para $h > 0$ y $f(a+h) < f(a)$ para $h < 0$.

(e) La parte (d) implica que f es creciente en a para todo a de $[0, 1]$, por lo que la parte (a) implica que f es creciente en $[0, 1]$.

(f) Si $\epsilon > 0$, entonces $g'(a) = f'(a) + \epsilon = \epsilon > 0$ para todo a de $[0, 1]$, con lo que g es creciente en $[0, 1]$ según la parte (e) y por lo tanto $f(1) + \epsilon > 0$, o $f(1) - f(0) > -\epsilon$. Análogamente, h es creciente en $[0, 1]$, con lo que $\epsilon - f(1) > -f(0)$, o $f(1) - f(0) < \epsilon$. Así pues, $|f(1) - f(0)| < \epsilon$. Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que $f(1) = f(0)$. (Por supuesto, el mismo razonamiento, aplicado a $[a, b]$ para $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, demuestra que $f(a) = f(b)$.)

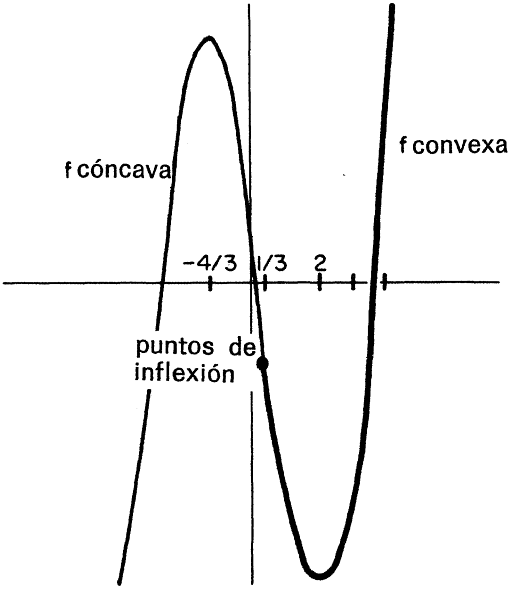
50. Sea $\alpha = \sup A$, donde $A = \{x \text{ en } [x_0, b]\colon f(y) = f(x_0) \text{ para todo } y \text{ de } [x_0, x]\}$. Está claro que $f(\alpha) = f(x_0)$, ya que f es continua y existen x tan cerca como se quiera de α con $f(x) = f(x_0)$. Es también fácil ver que $f(y) = f(x_0)$ para todo $y < \alpha$. Así pues, α está en A. Si $\alpha < 1$, existe entonces un $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(\alpha)$ para $\alpha < x < \alpha + \delta$, ya que α es un máximo local. Pero $f(\alpha) = f(x_0)$, valor mínimo de f en $[a, b]$. Así pues, $f(x) = f(\alpha)$ para $\alpha < x < \alpha + \delta$. Esto implica que todos estos x están en A, lo cual es una contradicción. Con esto tenemos que $f(x) = f(x_0)$ para todo x de $[x_0, b]$. Una demostración análoga hace ver que $f(x) = f(x_0)$ para todo x de $[a, x_0]$.

51. (a) Los puntos estrictamente máximos locales son los números racionales.

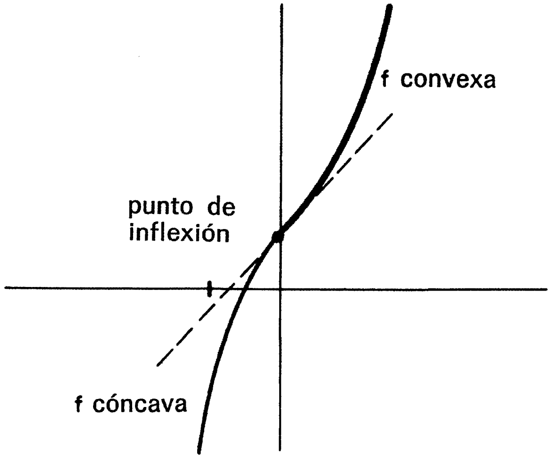
(b) Sea x un punto perteneciente a todos los intervalos $I_n = [a_n, b_n]$. Puesto que los puntos x_n se toman todos distintos, puede ser $x = x_n$ para un n a lo sumo. Al ser x un punto estrictamente máximo local, existe un $\delta > 0$ tal que x es un máximo estricto de f en $(x - \delta, x + \delta)$. Pero I_n está contenido en $(-x - \delta, x + \delta)$ para todos los n suficientemente grandes; tómese uno de tales n para el que sea $x \neq x_n$. Entonces $f(x) > f(x_n)$, ya que I_n está contenido en $(x - \delta, x + \delta)$, mientras que $f(x_n) > f(x)$, por estar x en I_n.

APÉNDICE

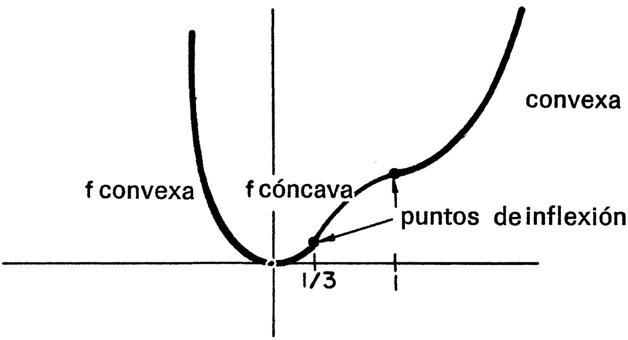
1. (i) $f''(x) = 6x - 2 > 0$ para $x > 1/3$.



(ii) $f''(x) = 20x^3 + 1 > 0$ para $x > -1/\sqrt[3]{20}$.



(iii) $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(3x-1)(x-1) > 0$ para $x < 1/3$ o $x > 1$.



(iv) Tenemos

$$f''(x) = \frac{-(x^5+x+1)^2\, 20x^3 + (5x^4+1)\, 2(x^5+x+1)(5x^4+1)}{(x^5+x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x^5+x+1)\,[(5x^4+1)^2 - 10x^3(x^5+x+1)]}{(x^5+x+1)^4}$$

$$= \frac{2}{(x^5+x+1)^3}\,[15x^8 - 10x^3 + 1].$$

Para determinar el signo de $f''(x)$ basta determinar el signo ae

$$g(x) = 15x^8 - 10x^3 + 1.$$

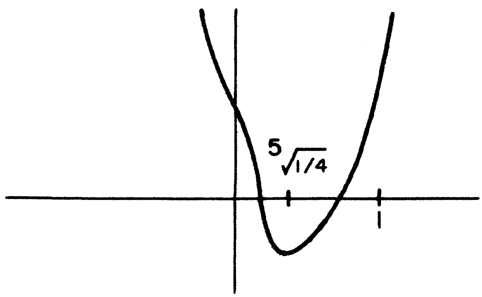
Tenemos ahora

$$g'(x) = 120x^7 - 30x^2 = 30x^2(4x^5 - 1).$$

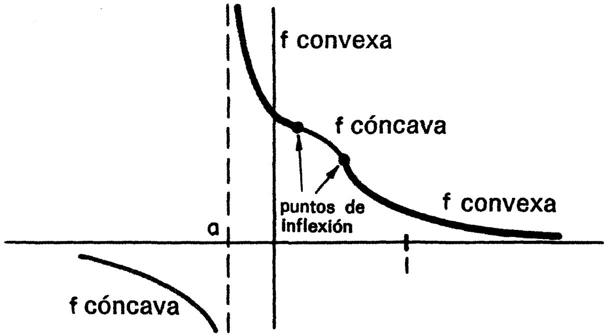
Así pues $g'(x) = 0$ para $x = 0$ o $x = \sqrt[5]{1/4}$. Tenemos $g(0) = 1$ y

$$\begin{aligned} g(\sqrt[5]{1/4}) &= (\sqrt[5]{1/4})^3 \left(15 \cdot \frac{1}{4} - 10\right) + 1 \\ &= (\sqrt[5]{1/4})^3 \left(\frac{-25}{4}\right) + 1 \\ &< 0, \end{aligned}$$

ya que $\sqrt[5]{1/64} > 4/25$. Así pues, g alcanza su valor mínimo (negativo) en $\sqrt[5]{1/4}$. Además, al ser $h(x) = 4x^5 - 1$ creciente, $g'(x) > 0$ para $x > \sqrt[5]{1/4}$ y $g'(x) < 0$ para $x < \sqrt[5]{1/4}$. Por lo tanto g es decreciente en $(-\infty, \sqrt[5]{1/4}]$ y creciente en $[\sqrt[5]{1/4}, \infty)$.



En consecuencia, g tiene dos ceros, ambos en $[0, 1]$, ya que $g(1) > 0$. De aquí se sigue que si a es la única raíz de $x^5 + x + 1$, entonces $f''(x) < 0$ para $x < a$, pero $f''(x) > 0$ para todo $x > a$ excepto para los x de un cierto intervalo contenido en $(0, 1)$. Así pues, la gráfica de f es convexa en (a, ∞), excepto en un trozo que queda por encima de cierto intervalo contenido en $(0, 1)$.



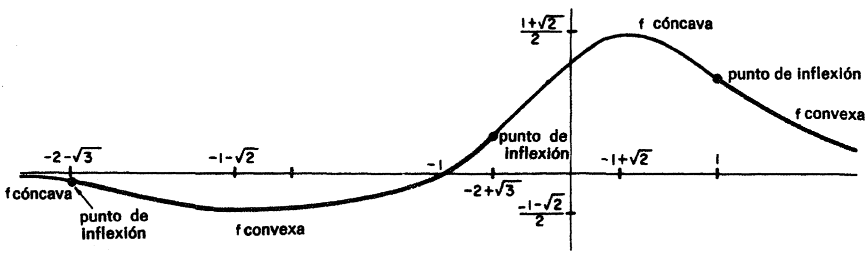
(v) Tenemos

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-2-2x)-(1-2x-x^2)\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2}{(x^2+1)^3}[x^3+3x^2-3x-1] = \frac{2}{(x^2+1)^3}(x-1)(x^2+4x+1)$$

$$= \frac{2}{(x^2+1)^3}(x-1)(x-[-2+\sqrt{3}])(x-[-2-\sqrt{3}]),$$

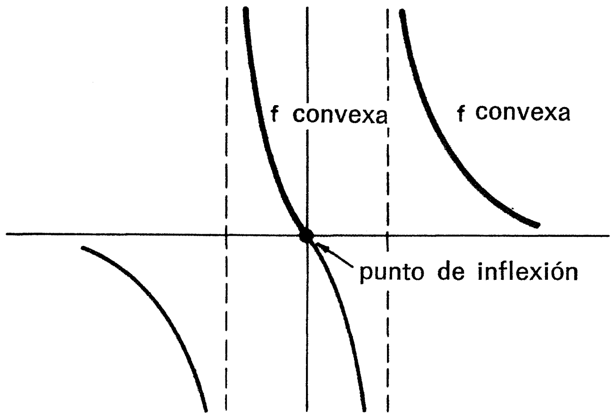
así pues, $f''(x) > 0$ para $-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$ y $x > 1$.



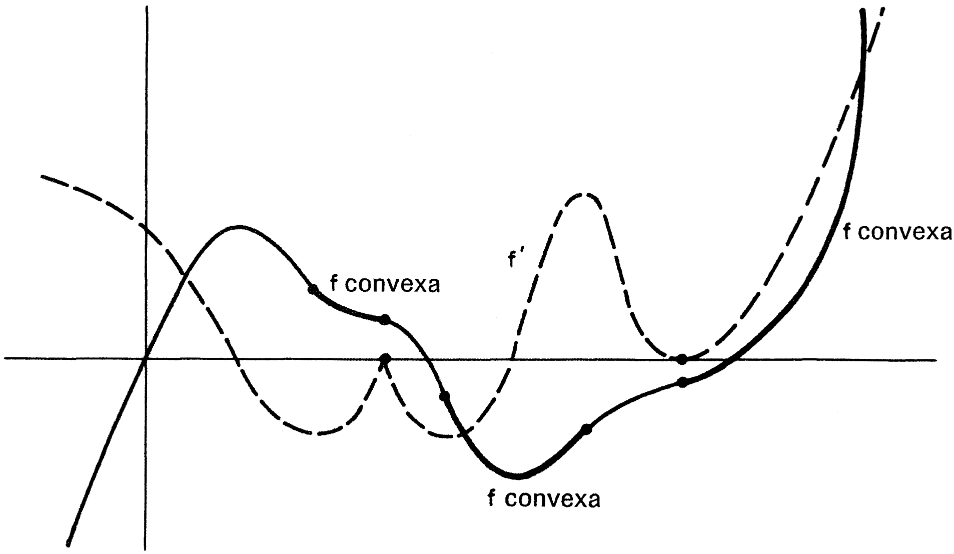
$$\text{(vi)}\quad f''(x) = \frac{(x^2-1)^2(-2x)+(1+x^2)\,2(x^2-1)\,2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{2x}{(x^2 - 1)^3}[x^2 + 3],$$

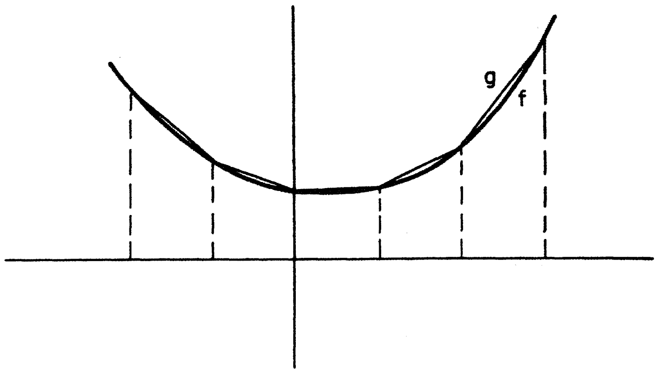
así pues, $f''(x) > 0$ para $x > 1$ y $-1 < x < 0$.



2. Si $f(0) = 0$, la gráfica tiene el siguiente aspecto.



3. Vemos indicadas a continuación a dos de estas funciones.



4. Los puntos de (x, y) son precisamente los de la forma $tx + (1 - t)y$ para $0 < t < 1$. En efecto, si $0 < t < 1$, entonces

$$x = tx + (1 - t)x < tx + (1 - t)y < ty + (1 - t)y = y,$$

y recíprocamente, si $x < z < y$, entonces

$$z = tx + (1 - t)y \qquad \text{para } 0 < t = \frac{y - z}{y - x} < 1.$$

La definición 2 hace ver de este modo que f es convexa si y sólo si

$$\frac{f(tx + (1 - t)y) - f(x)}{tx + (1 - t)y - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

lo cual equivale a

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

5. Si $a < x < b$, entonces $f(a) < f(x) < f(b)$, con lo que

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} < \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{f(b) - f(a)},$$

y en consecuencia

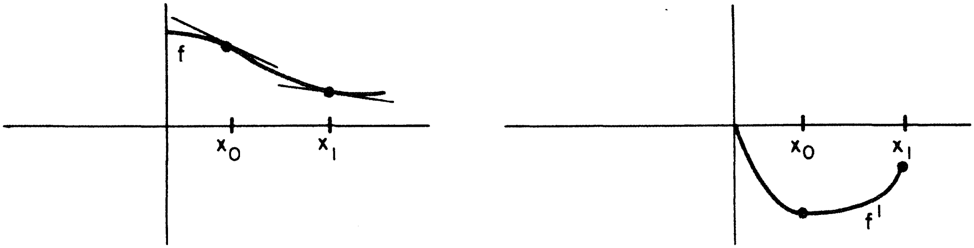
$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &< \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{f(b) - f(a)} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{g(f(b)) - g(f(a))}{b - a}. \end{aligned}$$

(Si f y g' son derivables, se puede dar una demostración sencilla: $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ es creciente porque $g' \circ f$ es creciente (por serlo g' y f), y f' es creciente y positiva.)

6. Tómese $x > 0$ tal que $f(x) < f(0)$. El teorema del valor medio implica que existe un x_0 en $(0, x)$ con $f'(x_0) < 0$. Si tuviéramos $f'(y) \leqslant f'(x_0)$ para todo $y \geqslant x_0$, entonces para todo $x > x_0$ tendríamos

$$f(x) - f(x_0) \leqslant f'(x_0)(x - x_0),$$

lo que implicaría que $f(x)$ fuera eventualmente negativo (por ser $f'(x_0) < 0$). Por lo tanto, $f'(x_1) > f'(x_0)$ para algún $x_1 > x_0$.



Esto implica que el mínimo de f' en $[0, x_1]$ se presenta en un x de $(0, x_1)$. Entonces $f''(x) = 0$.

7. (a) Esto se deduce del problema 4 con $t = 1/2$.

(b) El aserto es válido para $n = 1$, es decir, $k = 1/2$. Supóngase que para algún n es válido para todo x y para todo y. Si $k = m/2^{n+1}$ es irreducible, entonces k es impar. En consecuencia, $k_1 = (m - 1)/2^{n+1}$ y $k_2 = (m + 1)/2^{n+1}$ pueden expresarse en la forma $a/2^n$, con lo que el aserto es válido para k_1 y k_2. Obsérvese también que $k = (k_1 + k_2)/2$. Partiendo del resultado para k_1 y k_2 y del aserto para $n = 1$ aplicado a $x' = k_1x + (1 - k_1)y$ y a $y' = k_2x + (1 - k_2)y$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(kx + (1 - k)y) &= f\left(\frac{x' + y'}{2}\right) < \frac{f(x')}{2} + \frac{f(y')}{2} \\ &< \frac{k_1f(x) + (1 - k_1)f(y)}{2} + \frac{k_2f(y) + (1 - k_2)f(y)}{2} \\ &= kf(x) + (1 - k)f(y). \end{aligned}$$

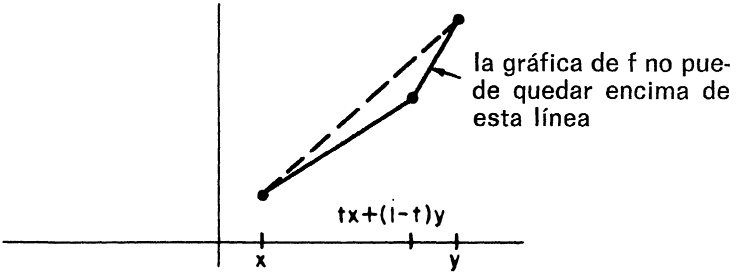
(c) Sea $0 < t < 1$. Para todo $\epsilon > 0$ existe un número k de la forma $m/2^n$ y tan próximo a t que

$$|f(kx + (1 - k)y) - f(tx + (1 - t)y)| < \epsilon,$$
$$|[kf(x) + (1 - k)f(y)] - [tf(x) + (1 - t)f(y)]| < \epsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &< f(kx + (1 - k)y) + \epsilon \\ &< kf(x) + (1 - k) f(y) + \epsilon \\ &< tf(x) + (1 - t) f(y) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Así pues, $f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t) f(y)$. El siguiente diagrama hace ver que si la desigualdad estricta se cumple, aunque sea para un solo t, se cumple entonces para todos los t (aplicando la desigualdad débil a x y $tx + (1 - t)y$ o a $tx + (1 - t)y$ e y).



Pero tenemos la desigualdad estricta cuando t es de la forma $m/2^n$, con lo que deberemos tener la desigualdad estricta para todo t.

8. (*a*) Sean x_α y x_β respectivamente el más pequeño y el más grande x_i. Entonces

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i x_\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_\beta = x_\beta.$$

(b) La parte (a), aplicada a $p_1/t, \ldots, p_{n-1}/t$ hace ver que $(1/t) \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ está comprendido entre el más pequeño y el mayor de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, con lo que estará comprendido ciertamente entre el más pequeño y el mayor de $x_1, \ldots, x_n$.

(c) El teorema de Jensen es válido para $n = 1$. Supóngase que sea válido para $n - 1$. Entonces por el problema 4 tenemos, por ser $p_n = 1 - t$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) &= f\left(t \cdot (1/t) \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + (1 - t)x_n\right) \\ &\leqslant t\, f\left(\sum_{i=1}^{n-1} (p_i/t)x_i\right) + (1 - t)f(x_n) \end{aligned}$$

$$\leqslant t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i}{t} f(x_i) + p_n f(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

(El mismo tipo de demostración hace ver que la desigualdad estricta es válida para $n > 1$ (empiécese comprobando que la desigualdad estricta es válida para $n = 2$).)

9. (a) Según se desprende de la demostración del teorema 1, $[f(a+h) - f(a)]/h$ es decreciente cuando $h \to 0^+$, con lo que

$$f_+'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \inf \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} : \ h > 0 \right\}.$$

Este ínfimo existe, ya que cada cociente $[f(a+h) - f(a)]/h$ para $h > 0$ es mayor que cualquiera de estos cocientes para $h < 0$. De análoga manera

$$f_-'(a) = \sup \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} : \ h < 0 \right\}.$$

La relación $f_-'(a) \leqslant f_+'(a)$ es obvia por las consideraciones anteriores. Las funciones f_+' y f_-' son crecientes, ya que si $a < b$, entonces (lo mismo que en la demostración del teorema 1; véase la figura 6) tenemos

$$f_-'(a) \leqslant f_+'(a) < \frac{f(a + (b-a)) - f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{f(b + (a-b)) - f(b)}{a-b} < f_-'(b) \leqslant f_+'(b).$$

(b) Si $b < a$, entonces, lo mismo que en la parte (a) (con a y b intercambiados) tenemos

$$f_+'(b) < f_-'(a) \leqslant f_+'(a).$$

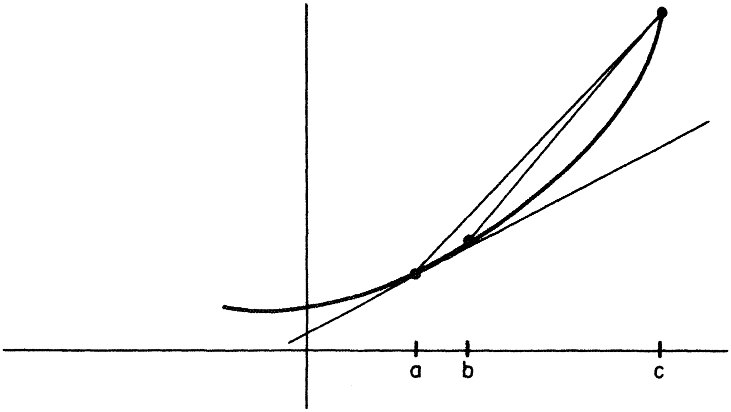
Si f_+' es continua en a, entonces $\lim_{b \to a} f_+'(b) = f_+'(a)$, con lo que debemos tener $f_-'(a) = f_+'(a)$.

Para demostrar la recíproca, hacemos ver primero que f_+' será siempre continua por la derecha, es decir,

$$\lim_{b \to a^+} f_+'(b) = f_+'(a).$$

En efecto, para todo $\epsilon > 0$ podemos tomar $c > a$ tal que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}<f_+'(a)+\epsilon.$$



Al existir $f_+'(a)$, f satisface $\lim_{b\to a^+} f(b) = f(a)$ (de hecho, f es continua en a aun cuando no exista $f_+'(a)$; véase el problema 11). Podemos así elegir $b > a$ en la proximidad de a con $f(b)$ tan cerca como se quiera de $f(a)$. Por lo tanto podemos elegir $b > a$ tal que

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}<\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\epsilon.$$

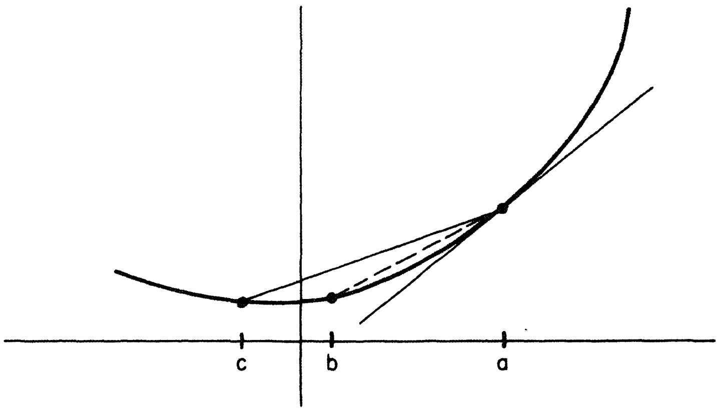
En consecuencia

$$\begin{aligned} f_+'(a)<f_+'(b) &< \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \\ &< \frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\epsilon \\ &< f_+'(a)+2\epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que f_+' es continua por la derecha.

Queda por demostrar que si $f_+'(a) = f_-'(a)$, entonces f_+' es continua por la izquierda en a. Dado $\epsilon > 0$, tómese $c < a$ tal que

$$f_+'(a)-\epsilon = f_-'(a)-\epsilon<\frac{f(a)-f(c)}{c-a}.$$

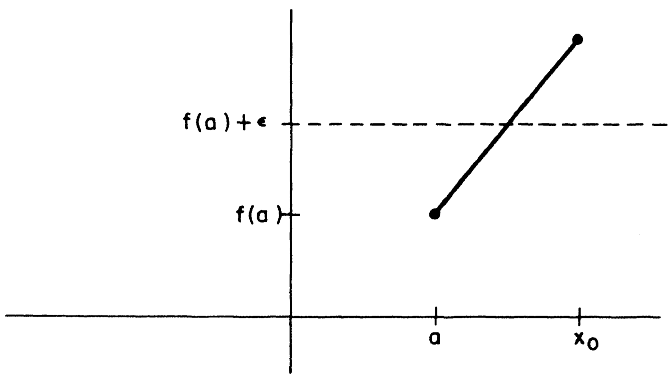


Entonces, si $c < b < a$, la secante por $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$ queda entre la tangente en a y la secante por $(c, f(c))$ y $(a, f(a))$, es decir,

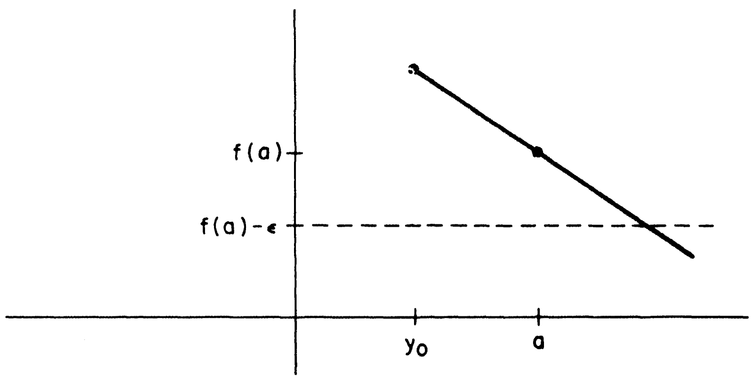
$$f_+'(a) - \epsilon < \frac{f(a) - f(c)}{c - a} < \frac{f(a) - f(b)}{a - b} < f_+'(b) < f_+'(a).$$

Esto demuestra que $\lim_{b \to a^-} f_+'(b) = f_+'(a)$.

10. Sea $\epsilon > 0$. Tómese un $x_0 > a$. Obsérvese que cualquiera que sea el valor de $f(x_0)$, el segmento rectilíneo entre $(a, f(a))$ y $(x_0, f(x_0))$ llega a quedar eventualmente por debajo de la horizontal a la altura $f(a) + \epsilon$. Puesto que la gráfica de f debe quedar por debajo de esta recta en (a, x_0), esto demuestra que $f(x) < f(a) + \epsilon$ para todo $x > a$ suficientemente próximo de a. Un razonamiento análogo es aplicable para todo $x < a$ suficientemente próximo de a.



Queda por demostrar que $f(x) > f(a) - \epsilon$ para todo x suficientemente próximo de a. Si es $f(x) \geqslant f(a)$ para todo x, ya no queda nada por demostrar, supondremos que es $f(x_0) < f(a)$ para algún x_0 con $x_0 > a$; pongamos que sea $x_0 > a$. Debemos tener entonces $f(x) > f(a)$ para todo $y < a$, por la convexidad, con lo que todos los $y < a$ satisfacen ciertamente $f(y) > f(a) - \epsilon$. Además, si tomamos un $y_0 < a$, entonces el segmento rectilíneo entre $(y_0, f(y_0))$ y $(a, f(a))$ queda por encima de la horizontal de altura $f(a) - \epsilon$ en un intervalo a la derecha de a. Puesto que la gráfica de f debe quedar por *encima* de esta recta a la derecha de a, se sigue que $f(x) > f(a) - \epsilon$ para todo $x > a$ suficientemente próximo de a.

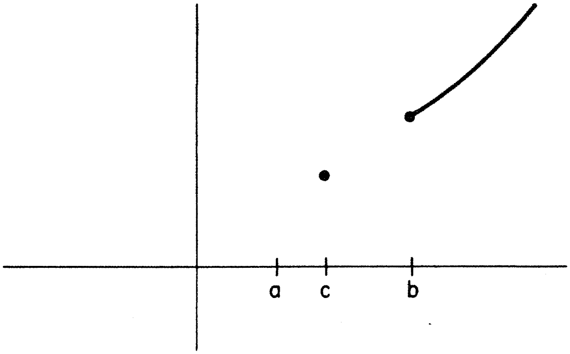


11. *Lema.* Supóngase que f es convexa en $\mathbf{R}$ y que es $a < b$. Si es $f(a) < f(b)$, entonces f es creciente en $[b, \infty)$ y si $f(a) > f(b)$, entonces f es decreciente en $(-\infty, a]$.

Demostración. Consideremos el caso $f(a) < f(b)$ (la demostración en el otro caso es análoga, o bien se puede aplicar este primer caso a $g(x) = f(-x)$).

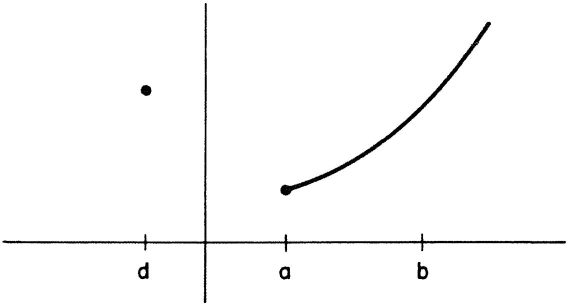
Si es $b < d$, entonces la definición de convexidad hace ver inmediatamente que no podemos tener $f(d) \leqslant f(b)$. Además, si $b < d_1 < d_2$, entonces el mismo razonamiento hace ver (puesto que sabemos ahora que es $f(b) < f(d_1)$) que $f(d_1) < f(d_2)$. Así pues, f es creciente en $[b, \infty)$.

Con ayuda de este lema podemos demostrar ahora el teorema. Puesto que f no es constante, existe un $a < b$ con $f(a) \neq f(b)$. Vamos a considerar solamente el caso $f(a) < f(b)$. Sabemos ya por el lema que f es creciente en $[b, \infty)$. Supongamos ahora que el mínimo de f en $[a, b]$ se presenta en un c de (a, b).



Entonces, según el lema, f es decreciente en $(-\infty, a]$. Además, si a' es un número cualquiera con $a < a' < c$, entonces debemos tener $f(a') > f(c)$ (si tuviéramos $f(a') = f(c)$, entonces sería $f(x) < f(c)$ para x en (a', c), en contradicción con el hecho de que c es el mínimo). De este modo el lema implica también que f es decreciente en $(-\infty, a']$ para todos estos a'. Esto demuestra que f es decreciente en $(-\infty, c]$. De modo análogo se ve que f es creciente en $[c, \infty)$.

Por otra parte, supóngase que el mínimo de f en $[a, b]$ se presenta en a. El mismo tipo de razonamiento antes usado hace ver que f es creciente en $[a, \infty)$. Existen dos posibilidades. Puede ocurrir que $f(d) > f(a)$ para algún $d < a$.



En este caso, el mínimo de f en $[d, a]$ se presenta en un c con $d < c \leqslant a$. El mismo razonamiento anterior hace ver que f es decreciente en $(-\infty, c]$ y creciente en $[c, \infty)$. Puede también ocurrir que $f(d) < f(a)$ para todo $d < a$. Entonces aplicamos los resultados ya demostrados (para $a < b$) a $d < a$: Si el mínimo de f se presenta en un punto c de (d, a), entonces f es decreciente en $(-\infty, c]$ y creciente en $[c, \infty)$, pero si el mínimo está siempre en d, entonces f es creciente en $[d, \infty)$ para todo d, con lo que f es creciente.

CAPÍTULO 12

1. (ii) $f^{-1}(x) = x^{1/3} + 1$. (Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y) = (y-1)^3$, con lo que $y = 1 + x^{1/3}$.)

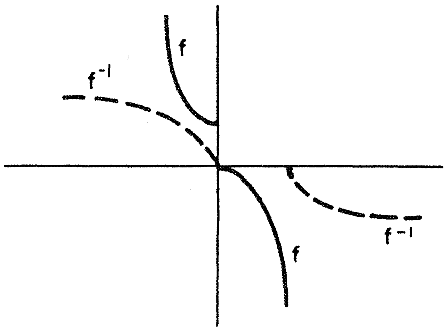
(iv)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} (-x)^{1/2}, & x \leqslant 0 \\ (1-x)^{1/3}, & x > 1. \end{cases}$$

(Si $y = f^{-1}(x)$, entonces

$$x = f(y) = \begin{cases} -y^2, & y \geqslant 0 \\ 1-y^3, & y < 0. \end{cases}$$

Puesto que es $-y^2 \leqslant 0$ si $y \geqslant 0$ y $1-y^3 > 1$ si $y<0$, tenemos $y = (-x)^{1/2}$ para $x \leqslant 0$ e $y = (1-x)^{1/3}$ para $x > 1$.)



(vi) $f^{-1}(x) = x - [x/2]$ para $[x]$ par. (Si $y = f^{-1}(x)$, entonces

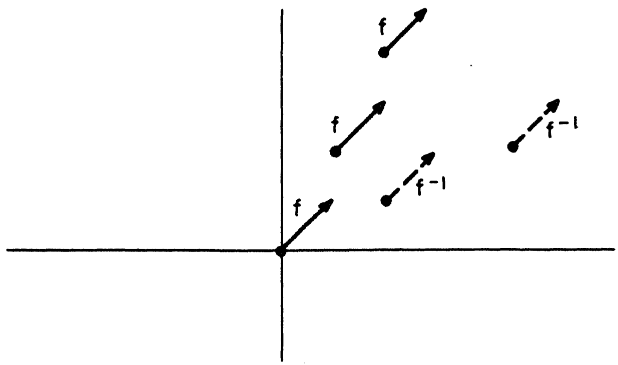
$$\begin{aligned} x = f(y) &= y + [y] \\ &= y + n \qquad \text{para } n \leqslant y < n+1\,. \end{aligned}$$

Así pues,

$$2n \leqslant x < 2n + 1,$$

e

$$y = x - n = x - [x/2].)$$



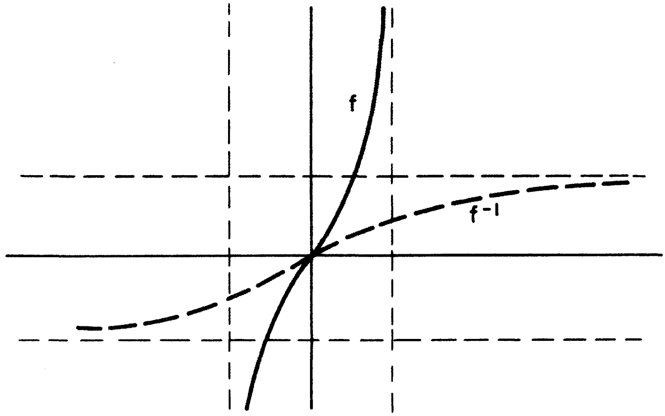
(viii)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

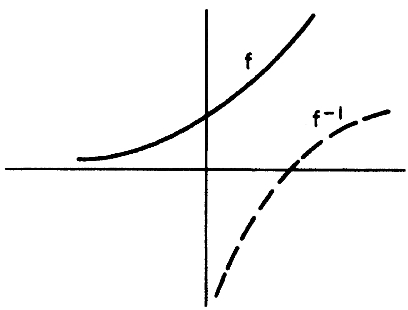
(Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y) = y/(1 - y^2)$. Así pues, $xy^2 + y - x = 0$. Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Si $x \neq 0$, entonces

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x} \quad \text{o} \quad y = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}.$$

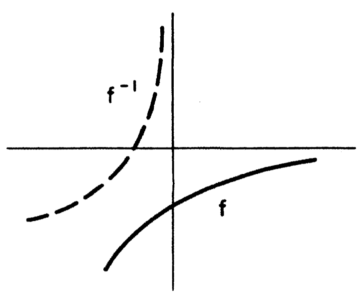
La primera posibilidad es la correcta, ya que x e y tienen que tener el mismo signo.)



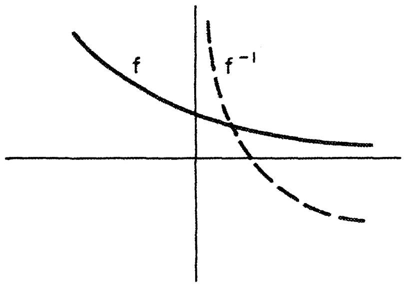
2. (i) f^{-1} es creciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \leqslant 0$.



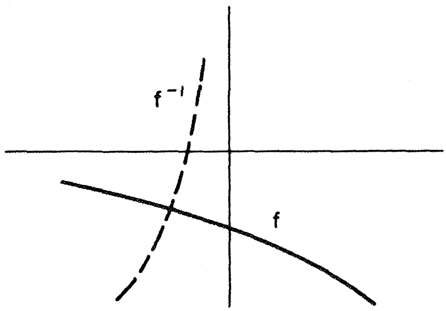
(ii) f^{-1} es creciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \geqslant 0$.



(iii) f^{-1} es decreciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \leqslant 0$.



(iv) f^{-1} es decreciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \geqslant 0$.



6. (b) Si $h(x) = 1 + x$, entonces $g = h \circ f$, con lo que $g^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$, así que $g^{-1}(x) = f^{-1}(x - 1)$. Es también posible hallar g^{-1} directamente: si $y = g^{-1}(x)$, entonces $x = g(y) = 1 + f(y)$, con lo que $y = f^{-1}(x - 1)$.

8. (ii) Cualquier intervalo $[a, b]$ ya que f es creciente.

   (iv) Los intervalos $[a, b]$ contenidos en $(-\infty, 0]$ o en $[-1, 1]$ o en $[0, \infty)$. (Véase la gráfica en la solución al problema 11-2 (v).)

9. Aplíquese el teorema 5 a f^{-1}.

10. (a) Sea $f = g^{-1}$, donde $g(x) = -x^5 - x$. Obsérvese que g es uno-uno, ya que $g'(x) = -5x^4 - 1 < 0$ y que g toma todos los valores. Así pues f está definida en $\mathbf{R}$ y para todo x tenemos

$$x = g(f(x)) = -[f(x)]^5 - f(x).$$

Además, f es derivable, ya que $g'(x) \neq 0$ para todo x.

(b)

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \qquad \text{por el teorema 5}$$

$$= \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{-5[f(x)]^4 - 1}.$$

(c) Derivando ambos miembros de

$$[f(x)]^5 + f(x) + x = 0$$

se obtiene

$$5[f(x)]^4 \cdot f'(x) + f'(x) + 1 = 0,$$

con lo que

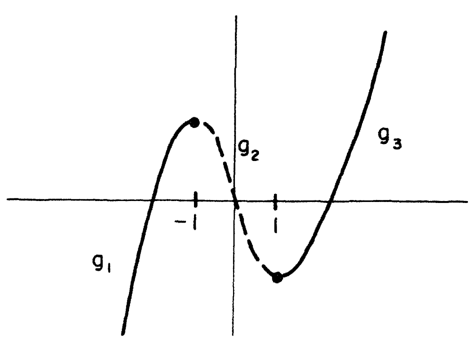
$$f'(x) = \frac{-1}{1 + 5[f(x)]^4}.$$

11. (a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

(b) No existe ninguna función que tenga esta propiedad.

(c) Sea

$$\left.\begin{matrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{matrix}\right\} = g(x) \quad \text{para} \quad \left\{\begin{matrix} x < -1 \\ -1 < x < 1 \\ x > 1. \end{matrix}\right.$$



Cada una de las g_i es uno-uno. Si $f_i = g_i^{-1}$, entonces cada f_i satisface $[f_i(x)]^3 - 3f_i(x) = x$. El dominio de

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\right\} \quad \text{es} \quad \left\{\begin{array}{l} (-\infty, 2) \\ (-2, 2) \\ (2, \infty). \end{array}\right.$$

(Para hallar explícitamente $y = f_i(x) = g_i^{-1}(x)$ tendríamos que resolver la ecuación $x = g(y) = y^3 - 3y$. Esto puede hacerse, pero a costa de mucho trabajo; véase el Capítulo 24.)

No resulta difícil ver que cualquier función continua f que satisfaga $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$ y que esté definida en un intervalo debe ser (parte de) una f_i. Puesto que una tal función f satisface $g(f(x)) = x$, esta ecuación implica que f es uno-uno (problema 3-23) y que f^{-1} coincide con g en el dominio de f^{-1}. Pero el dominio de f^{-1} es un intervalo, y los únicos intervalos en los que g es uno-uno están contenidos en $(-\infty, -1)$, o en $(-1, 1)$, o en $(1, \infty)$.

12. (a) Al derivar ambos miembros de $[f(x)]^2 + x^2 = 1$ se obtiene

$$2f(x)f'(x) + 2x = 0,$$

o

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

(b) Esta ecuación es válida para

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{en cuyo caso} \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{f(x)},$$

y

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad \text{en cuyo caso} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{f(x)}.$$

(c) Tenemos

$$3[f(x)]^2f'(x) - 3f'(x) = 1,$$

con lo que

$$f'(x) = \frac{1}{3([f(x)]^2 - 1)}.$$

13. Consideremos una función derivable f que satisface

$$[f(x)]^4 + [f(x)]^3 + x\,f(x) = 1;$$

entonces

$$4[f(x)]^3f'(x) + 3[f(x)]^2f'(x) + f(x) + xf'(x) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{4[f(x)]^3 + 3[f(x)]^2 + x}.$$

16. (ii) $\beta^{-1}(3) = -1$, ya que $\beta(-1) = h(0) = 3$. Así pues,

$$\begin{aligned}(\beta^{-1})'(3) &= \frac{1}{\beta'(\beta^{-1}(3))} = \frac{1}{\beta'(-1)}\\ &= \frac{1}{h'(0)}\\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} 1)}.\end{aligned}$$

(La solución no sorprende, ya que la ecuación $\beta(x) = h(x+1)$ implica que $\beta^{-1} = h^{-1} - 1$.)

18. Lo mismo que en los problemas 10-16 y 10-28, la dificultad principal está en conjeturar razonablemente la forma que ha de tener $(f^{-1})^{(k)}(x)$. No resulta difícil demostrar el siguiente aserto, por inducción sobre k: Si $f^{(k)}(f^{-1}(x))$ existe y no es 0, entonces

$$(f^{-1})^{(k)}(x) = \frac{A(x)}{[f'(f^{-1}(x))]^m}$$

para un entero m, donde $A(x)$ es una suma de términos de la forma

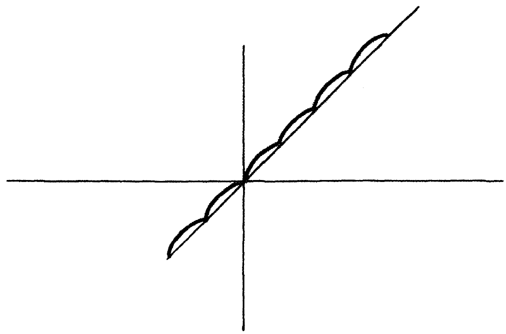
$$[f'(f^{-1}(x))]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [f^{(\ell)}(f^{-1}(x))]^{m_\ell}.$$

19. (a) Supóngase f creciente y g decreciente y que $f(a) = g(a)$. Si $a < b$, entonces

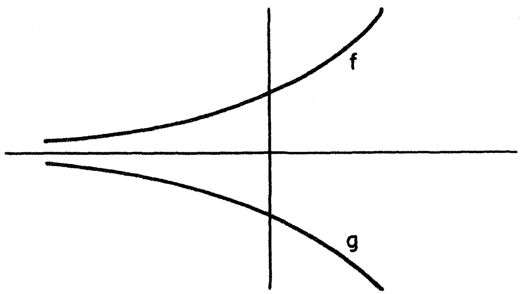
$$g(b) < g(a) = f(a) < f(b),$$

y análogamente si es $b < a$.

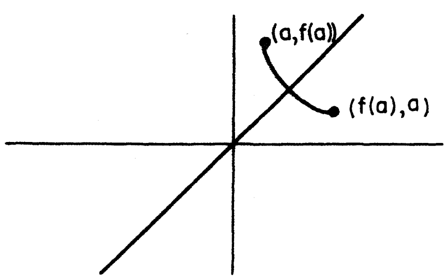
(b) En la figura se muestran funciones f y g apropiadas (para ser explícitos podemos tomar $g(x) = x$ y $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ (problema 4-15)).



(c) En la figura que sigue se exhiben funciones f y g adecuadas. (Utilizando la función exponencial del capítulo 17, podemos definir $f(x) = e^x$ y $g(x) = -e^x$, pero en este momento una definición explícita resultaría trabajosa.)

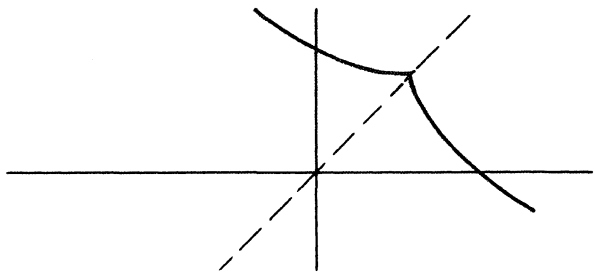


20. (a) La interpretación geométrica de la demostración viene indicada en la figura que sigue: Si $f(a) > a$, entonces $f(f(a)) = a < f(a)$. Al ser $f(a) > a$ y $f(b) < b$ para algún b (para $f(a)$, por ejemplo), se sigue que $f(x) = x$ para algún x de $[a, b]$.



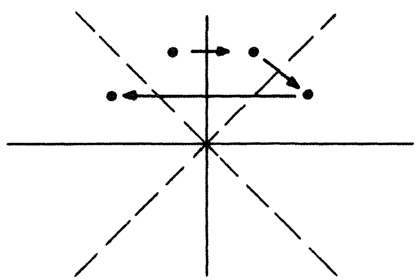
(*b*) Sea f una función cualquiera decreciente en $(-\infty, a]$ que toma todos los valores $\geqslant a$, y definamos

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqslant a \\ f^{-1}(x), & x \geqslant a. \end{cases}$$



(c) Si $f(x) < x$, entonces $x = f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x) = f(x)$, lo cual es una contradicción. De modo análogo se ve que tampoco podemos tener $f(x) > x$.

21. Las funciones con esta propiedad son precisamente las funciones uno-uno, ya que obtener la figura simétrica respecto a la antidiagonal viene a ser lo mismo que hacer las simetrías primero respecto al eje vertical, después respecto a la diagonal y finalmente otra vez respecto al eje vertical.



Si se quiere una demostración más analítica, obsérvese que el simétrico de (a, b) respecto a la antidiagonal es $(-b, -a)$. Así pues, si $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ son dos puntos de la gráfica de f, exigimos que $(-f(a), -a)$ y $(-f(b), -b)$ no tengan la misma coordenada primera si $a \neq b$. En otros términos $f(a)$ y $f(b)$ tienen que ser distintos. Por lo tanto f tiene que ser uno-uno.

22. (a) Al ser f no creciente, existe un $x < y$ con $f(y) \leqslant f(x)$. Al ser f no decreciente, si $x \leqslant z \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y) \leqslant f(x)$. Por lo tanto $f(x) = f(z) = f(y)$.

(b) $f(x + h) \geqslant f(x)$ para $h > 0$ y $f(x + h) \leqslant f(x)$ para $h < 0$, con lo que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

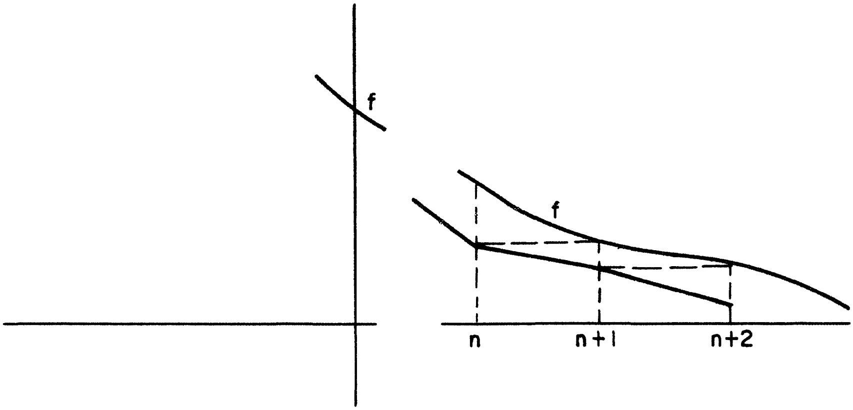
para todo $h \neq 0$, de donde $f'(x) \geqslant 0$.

(c) Si $y > x$, entonces

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) \geqslant 0 \qquad \text{para un } z \text{ de } (x, y),$$

con lo que $f(y) \geqslant f(x)$. Análogamente, si $y < x$ entonces $f(y) \leqslant f(x)$.

23. (a) La idea en que se basa la demostración queda indicada en la figura que sigue. En el intervalo $[n, n + 1]$, tomemos como g la función lineal con $g(n) = f(n + 1)$ y $g(n + 1) = f(n + 2)$.



(b) En el intervalo $[n, n+ 1]$ sea g la función lineal con $g(n) = f(n + 1)/(n + 1)$ y $g(n + 2) = f(n+ 2)/(n + 2)$.

CAPÍTULO 13

3. (a) El problema 2-6 hace ver que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \dots,$$

lo cual, como es evidente, puede aproximarse tanto como se quiera a $1/(p+1)$ tomando n suficientemente grande.

(b) Tenemos

$$L(f, P_n) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} k^p \right],$$

$$U(f, P_n) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \left[\sum_{k=1}^{n} k^p \right].$$

La parte (a) hace ver que $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden aproximarse tanto como se quiera a $b^{p+1}/(p+1)$ sin más que tomar n suficientemente grande. Lo mismo que en el problema 1, esto implica que $\int_0^b x^p\, dx = b^{p+1}/(p+1)$.

4. (ii) $\int_0^2 f = 0$.

(iv) f no es integrable.

(vi) f es integrable; se puede dar una demostración rigurosa de ello de distintas maneras, utilizando diversos problemas de este capítulo, por ejemplo el problema 15. (Se puede suponer que la integral de f es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots.$$

En este momento no sabemos siquiera qué sentido tiene una suma infinita y menos aún cómo trabajar con este tipo de sumas, pero las siguientes manipulaciones que parecen aceptables resultarán ser efectivamente válidas:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots$$

$$=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\dots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\dots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\right).$$

Partiendo del hecho que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

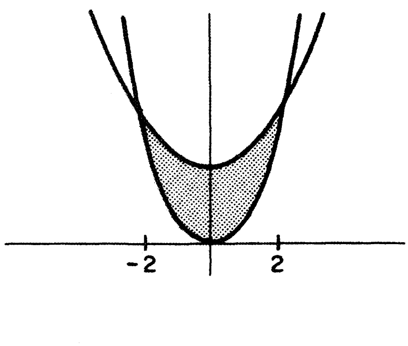
según se ha deducido en el problema 2-5, podríamos pensar que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots=1.$$

La otra suma infinita resulta ser igual a $\pi^2/6$ (pero esto no viene demostrado en el texto), con lo que la integral de f es $\pi^2/6-1$.)

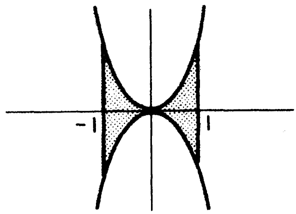
5. (i)

$$\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+2\right)-x^2\,dx=\frac{16}{3}.$$



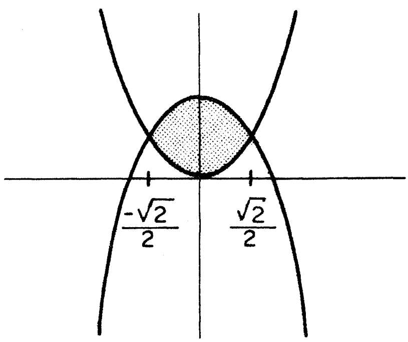
(ii)

$$\int_{-1}^{1} x^2 - (-x^2)\,dx = \frac{4}{3}.$$



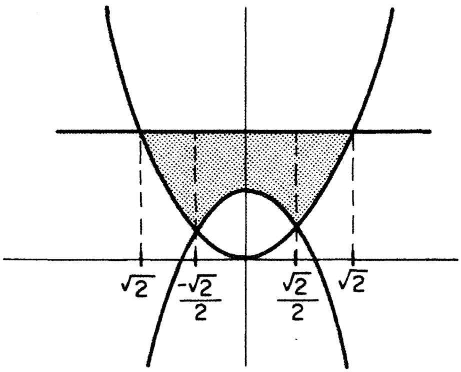
(iii)

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1-x^2) - x^2\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



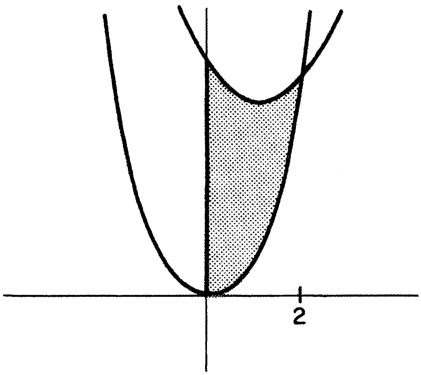
(iv)

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}/2} 2 - x^2\,dx + \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} 2 - (1-x^2)\,dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} 2 - x^2\,dx$$
$$= 2\sqrt{2}.$$



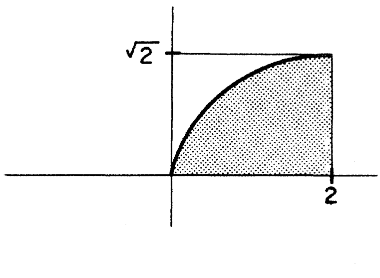
(v)

$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 4) - x^2\,dx = 4.$$



(vi) El área tiene que ser

$$2\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$



7. La primera desigualdad es un caso particular del problema 8-13, y la segunda es consecuencia del hecho de que $\{f(x_1) + g(x_2)\colon t_{i-1} \leqslant x_1, x_2 \leqslant t_i\}$ contiene todos los números de $\{f(x) + g(x)\colon t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}$, y posiblemente otros más pequeños.

8. (a) *Si* $L(f, P) = U(f, P)$ aunque sólo sea para una partición P, entonces cada $m_i = M_i$, con lo que f es constante en cada $[t_{i-1}, t_i]$. Puesto que estos intervalos cerrados se solapan, f tiene que ser constante en todo $[a, b]$.

   (b) Si $L(f, P_1) = U(f, P_2)$ y P contiene a la vez a P_1 y P_2, entonces $L(f, P_1) \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant U(f, P_2) = L(f, P_1)$, con lo que $L(f, P) = U(f, P)$. Se sigue de la parte (a) que f es constante en $[a, b]$.

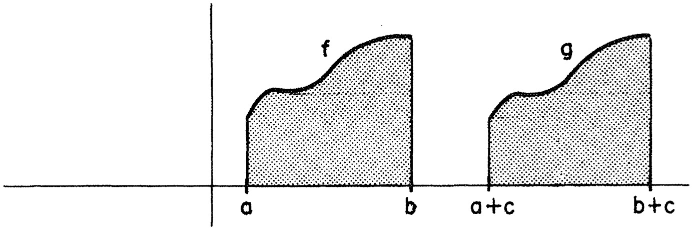
   (c) Solamente las funciones constantes. Supóngase en efecto que f no es constante en $[a, b]$ y que m es el mínimo de f en $[a, b]$. Al ser $f(x) > m$ para algún x y f continua, podemos elegir una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $f > m$ en algún intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Entonces $m_i > m$, con lo que $L(f, P) > m(b - a)$. Por otra parte, si Q es la partición $Q = \{a, b\}$, entonces $L(f, Q) = m(b - a)$.

   (d) Si f es integrable en $[a, b]$ y todas las sumas inferiores son iguales, entonces f toma el valor $m = \inf\{f(x)\colon a \leqslant x \leqslant b\}$ en un conjunto denso de puntos de $[a, b]$. En efecto, el problema 21 hace ver que f es continua en un conjunto denso de puntos. Pero si f es continua en x y $f(x) > m$, entonces, como en la parte (c), existe una partición P con $L(f, P) > m(b - a)$, mientras que $L(f, Q) = m(b - a)$ si $Q = \{a, b\}$, en contradicción con la hipótesis. Recíprocamente, es fácil ver que si f toma su valor mínimo m en un conjunto denso de puntos de $[a, b]$, entonces $L(f, P) = m(b - a)$, ya que cada $m_i = m$. (La condición de ser f integrable es esencial en este problema. Por ejemplo, si $f(x) = 1/q$ para $x = p/q$ en forma irreducible y $f(x) = 1$ para x irracional, entonces $L(f, P) = 0$ para toda partición P, pero f no toma en ningún punto el valor $0 = \inf\{f(x)\colon a \leqslant x \leqslant b\}$.)

9. El teorema 4, aplicado a $a < b < d$, implica que f es integrable en $[b, d]$. Entonces el teorema 4, aplicado a $b < c < d$, implica que f es integrable en $[b, c]$.

11. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Si $g(x) = f(x - c)$, entonces $m_i = \inf\{f(x)\colon t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} = \inf\{g(x)\colon t_{i-1} + c \leqslant x \leqslant t_i + c\}$ y análogamente para M_i, con lo que $L(f, P) = L(g, P')$ y $U(f, P) = U(g, P')$. Si f es integrable, de modo que para cada $\epsilon > 0$ tenemos $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ para alguna P, entonces g es también integrable, ya que tenemos $U(g, P') - L(g, P') < \epsilon$. Además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{L(f, P)\} = \sup\{L(g, P')\} = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$



12. Obsérvese que

$$b \cdot \inf\{1/t\colon\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\} = \inf\{1/t\colon\ bt_{i-1} \leqslant x \leqslant bt_i\}.$$

Denotando el primer inf por m_i y el segundo por m_i', tenemos

$$\begin{aligned} L(f, P') &= \sum_{i=1}^{n} m_i'(bt_i - bt_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} bm_i'(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= L(f, P). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_b^{ab} 1/t\ dt = \sup\{L(f, P')\} = \sup\{L(f, P)\} = \int_1^a 1/t\ dt.$$

13. Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, y $P' = \{ct_0, \ldots, ct_n\}$, entonces

$$m_i = \inf\{f(ct)\colon\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\} = \inf\{f(t)\colon\ ct_{i-1} \leqslant t \leqslant ct_i\} = m_i'.$$

Así pues, si $g(t) = f(ct)$, entonces

$$\begin{aligned} cL(g, P') &= c\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i(ct_i - ct_{i-1}) \\ &= L(f, P'). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{ca}^{cb} f(t)\,dt = \sup\{L(f, P')\} = c \cdot \sup\{L(g, P)\}$$
$$= c \cdot \int_a^b f(ct)\,dt.$$

(En realidad, esta demostración es válida sólo para $c \geqslant 0$, pero el caso $c < 0$ puede deducirse fácilmente.)

14. Tómese $M \geqslant 1$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo x de $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \epsilon/3M$. Al ser f continua en $[a, x_0 - \delta/2]$ y en $[x_0 + \delta/2, b]$, existen particiones $P_1 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, x_0 - \delta/2]$ y $P_2 = \{s_0, \ldots, s_m\}$ de $[x_0 + \delta/2, b]$ tales que $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon/3$ y $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \epsilon/3$. Si $P = \{t_0, \ldots, t_n, s_0, \ldots, s_m\}$, entonces

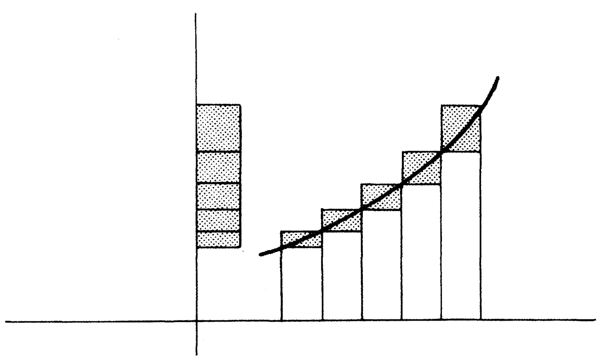
$$U(f, P) - L(f, P) \leqslant [U(f, P_1) - L(f, P_1)] + \delta \cdot M + [U(f, P_2) - L(f, P_2)] <$$
$$< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

5. (a)

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}),$$
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

(b) Si $t_i - t_{i-1} = \delta$ para cada i, entonces

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})](t_i - t_{i-1})$$
$$= \delta \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1})$$
$$= \delta[f(b) - f(a)].$$



(c) Para todo $\epsilon > 0$ tenemos $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ si $t_i - t_{i-1} = \delta = \epsilon/[f(b) - f(a)]$.

(d) La función del problema 4(vi) constituye un ejemplo (en el intervalo [0, 1]).

16. (a)

$$\begin{aligned} L(f^{-1}, P) + U(f, P') &= \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} t_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [t_i f^{-1}(t_i) - t_{i-1}f^{-1}(t_{i-1})] \\ &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a). \end{aligned}$$

(b) Se sigue de la parte (a) que

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{-1} &= \sup\{L(f^{-1}, P)\} = \sup\{bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - U(f, P')\} \\ &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \inf\{U(f, P')\} \\ &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f. \end{aligned}$$

(c) Si $f(x) = x^n$ para $x \geqslant 0$, entonces para $0 \leqslant a < b$ tenemos

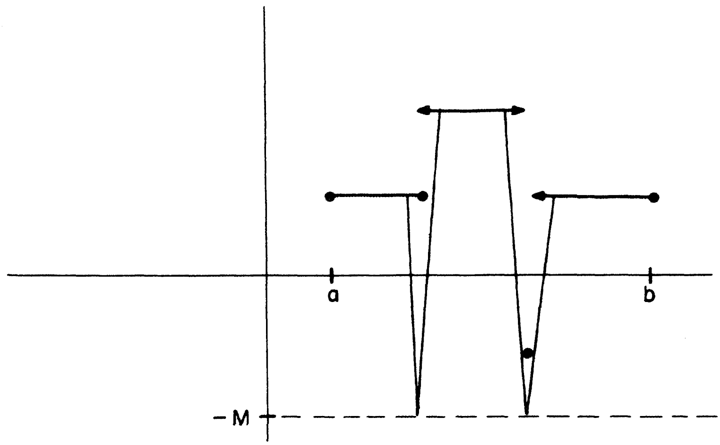
$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt[n]{x}\, dx = \int_a^b f^{-1} &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} x^n\, dx \\ &= b\sqrt[n]{b} - a\sqrt[n]{a} - \left[\frac{(\sqrt[n]{b})^{n+1}}{n+1} - \frac{(\sqrt[n]{a})^{n+1}}{n+1}\right] \\ &= \frac{n\sqrt[n]{b}}{n+1} - \frac{n\sqrt[n]{a}}{n+1}. \end{aligned}$$

17. (a) Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ con $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$, entonces $U(f, P) - \int_a^b f < \epsilon$ y $\int_a^b f - L(f, P) < \epsilon$. Pongamos $s_1(x) = m_i$ para los x de (t_{i-1}, t_i) y, por ejemplo $s_1(x) = 0$ para $x = t_0, \ldots, t_n$; de análoga manera, sea $s_2(x) = M_i$ para x en (t_{i-1}, t_i) y $s_2(x) = 0$ para $x = t_0, \ldots, t_n$.

(b) La existencia de estas funciones en escalera implica la existencia de particiones P_1 y P_2 con $U(f, P_2) - L(f, P_1) < \epsilon$.

(c) La función del problema 25 constituye un ejemplo.

18. Haciendo valer los resultados del problema 17(a), tómese una función en escalera $s \leqslant f$ con $\int_a^b f - \int_a^b s < \epsilon/2$. Tómese $M \geqslant 1$, tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo x de $[a, b]$, y si s es constante en (t_{i-1}, t_i) para $i = 1, \ldots, n$, tómese $\delta < \epsilon/2nM$. Sea $g = s$ en $[t_{i-1} + \delta/2, t_i - \delta/2]$ y sea g una función lineal en $[t_i - \delta/2, t_i]$ y en $[t_i, t_i + \delta/2]$ con $g(t_i) = -M$.



Entonces $g \leqslant s \leqslant f$ y $\int_a^b s - \int_a^b g \leqslant nM\delta < \epsilon/2$, con lo que

$$\int_a^b f - \int_a^b g < \epsilon.$$

19. (a) Si s_1 (respectivamente s_2) es constante en cada subintervalo de una partición P_1 (respectivamente P_2), entonces $s_1 + s_2$ es constante en los intervalos de la partición P que contiene a P_1 y a P_2.

(b) La parte (a) hace ver que existe una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que s_1 y s_2 son constantes en cada (t_{i-1}, t_i), en donde supondremos que toman respectivamente los valores a_i y b_i. Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b (s_1 + s_2) &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n b_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2.\end{aligned}$$

(c) Dado $\epsilon > 0$, tómense las funciones en escalera s_1, s_2 y t_1, t_2 con $s_1 \leqslant f \leqslant s_2$ y $t_1 \leqslant g \leqslant t_2$ con $\int_a^b s_2 - \int_a^b s_1 < \epsilon/2$ y $\int_a^b t_2 - \int_a^b t_1 < \epsilon/2$.

La parte (b) implica que

$$\int_a^b (s_1 + t_1) = \int_a^b s_1 + \int_a^b t_1 \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \int_a^b s_2 + \int_a^b t_2 = \int_a^b s_2 + t_2$$

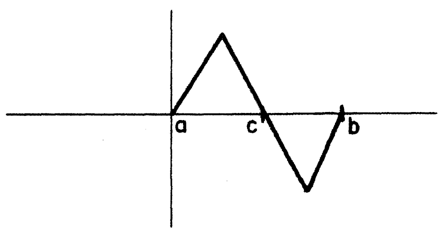
y que

$$\int_a^b (s_2 + t_2) - \int_a^b (s_1 + t_1) < \epsilon.$$

Esto demuestra que f es integrable y también que $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, ya que existe solamente un número comprendido entre todos estos $\int_a^b (s_2 + t_2)$.

20. Sea $g(x) = \int_a^x f - \int_x^b f$. Entonces g es continua y $g(a) = -\int_a^b f$ y $g(b) = \int_a^b f$; así pues, $g(a)$ y $g(b)$ tienen signos distintos y en consecuencia $g(x) = 0$ para algún x de $[a, b]$, a no ser que sea $g(a) = 0$, en cuyo caso podemos tomar $x = a$.

Para la función f indicada en la figura, las únicas soluciones son $x = a$ y $x = b$; f ha sido elegida de tal modo que $\int_a^c f = - \int_c^b f$.



21. (a) Está claro que si $M_i - m_i \geqslant 1$ para todo i, entonces $U(f, P) - L(f, P) \geqslant b - a$.

(b) Si $i = 1$, póngase $b_1 = t_1$ y tómese cualquier a_1, con $t_0 < a_1 < t_1$. Hágase lo análogo si es $i = n$.

(c) Tómese una partición P de $[a_1, b_1]$ con $U(f, P) - L(f, P) < (b_1 - a_1)/2$. Entonces $M_i - m_i < 1/2$ para algún i. Tómese $[a_2, b_2] = [t_{i-1}, t_i]$ salvo que sea $i = 1$ o n, en cuyo caso se hará la modificación como en la parte (b).

(d) Sea x un punto perteneciente a cada uno de los I_n. Obsérvese que no podemos tener $x = a_n$ o b_n, ya que x está también en $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ y $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. Si $\epsilon > 0$, existe un n tal que sup $\{f(x)$: x está en $I_n\}$ — inf $\{f(x)$: x está en $I_n\} < \epsilon/2$. Entonces $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ para todos los y de I_n; al estar x en (a_n, b_n), significa esto que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ para todos los y que satisfacen $|y - x| < \delta$, siendo $\delta > 0$ el mínimo de $x - a_n$ y $b_n - x$. Así pues, f es continua en x.

(e) f tiene que ser continua en algún punto de cada intervalo contenido en $[a, b]$, ya que en cada uno de estos intervalos f es integrable.

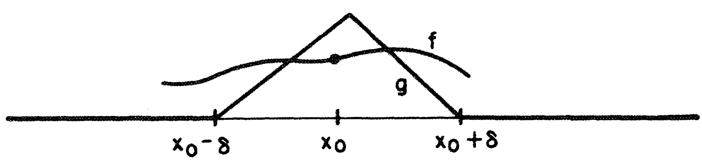
22. (a) Tómese x_0 en $[a, b]$ y hágase $f(x) = 0$ para todo $x \neq x_0$ y $f(x_0) = 1$. (La función del problema 25 constituye otro ejemplo.)

(b) Existe una partición P de $[a, b]$ tal que $f(x) > x_0/2$ para todo x de algún $[t_{i-1}, t_i]$. Entonces $L(f, P) \geqslant x_0(t_i - t_{i-1})/2$.

(c) Esto es consecuencia de la parte (b), ya que f es continua en algún x_0, según el problema 21.

23. (a) Tómese $g = f$. Entonces $\int_a^b f^2 = 0$. Al ser f continua, esto implica que $f = 0$.

(b) Si $f(x_0) > 0$, entonces $f(x) > 0$ para todos los x de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$. Tómese g continua con $g > 0$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $g = 0$ fuera de este intervalo. Resulta entonces $\int_a^b fg > 0$, lo cual es una contradicción.



25. Sea $\epsilon > 0$. Tómese n tal que $1/n < \epsilon/2$. Sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ los puntos racionales p/q de $[0, 1]$ con $q < n$. Tómese una partición $P = \{t_0, \ldots, t_k\}$ tal que los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ que contienen algún x_j tengan longitud total $< \epsilon/2$. En cada uno de los demás intervalos tenemos $M_i \leqslant 1/n < \epsilon/2$. Designemos por I_1 al conjunto de todos los i de 1 a n para los cuales

$[t_{i-1}, t_i]$ contiene algún x_j y por I_2 al conjunto de todos los i, de 1 a n, restantes. Al ser $f \leqslant 1$ por todas partes, tenemos

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i \text{ en } I_1} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \text{ en } I_2} M_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\leqslant 1 \cdot \sum_{i \text{ en } I_1} (t_i - t_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i \text{ en } I_2} (t_i - t_{i-1}) \\ &\leqslant 1 \cdot \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 = \epsilon. \end{aligned}$$

26. Sea f la función del problema 25, y sea $g(x) = 0$ para $x = 0$ y $g(x) = 1$ para $x \neq 0$. Entonces $(g \circ f)(x) = 0$ si x es irracional y 1 si x es racional.

28. (a) De la desigualdad $mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$, obtenemos

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

En consecuencia

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

para algún μ con $m \leqslant \mu \leqslant M$. Para este μ es $\mu = f(\xi)$ para algún ξ de $[a, b]$.

(b) Si $g(x) = x$ en $[-1, 1]$ y $f(x) = x$, entonces

$$\int_{-1}^1 f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3} \neq \mu \cdot \int_{-1}^1 x\,dx.$$

29. (a) Sea

$$h(\xi) = g(a) \int_a^\xi f(t)\,dt + g(b) \int_\xi^b f(t)\,dt.$$

Entonces

$$h(a) = g(b) \int_a^b f(t)\,dt,$$
$$h(b) = g(a) \int_a^b f(t)\,dt.$$

Al ser h continua, h toma todos los valores comprendidos entre $g(a)\int_a^b f(t)\,dt$ y $g(b)\int_a^b f(t)\,dt$. Por otra parte, $g(a)f(t) \leqslant g(t)f(t) \leqslant$

$\leqslant g(b)f(t)$ para todos los t de $[a, b]$, siempre que sea $g(t) \geqslant 0$ para todos los t de $[a, b]$. Así en este caso

$$g(a)\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant g(b)\int_a^b f(t)\,dt$$

y por lo tanto $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = h(\xi)$ para algún ξ.

Podemos ahora, mediante un sencillo artificio, tratar el caso en que $g(t)$ no es $\geqslant 0$ para todos los t de $[a, b]$: sustitúyase g por $g + c$ donde $g(t) + c \geqslant 0$ para todos los t de $[a, b]$. El teorema para $g + c$ implica el teorema para g.

(b) Sean $f = 1$ y g una función cualquiera en $[a, b]$ con $g(a) = g(b) = 0$ pero $g(x) > 0$ para todos los x de (a, b).

30. (a) Si

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant m_i \leqslant M_i, \\ m_i \leqslant M_i \leqslant 0\ , \\ m_i \leqslant 0 \leqslant M_i, \end{array}\right\} \text{ entonces } \left\{\begin{array}{l} M_i' = M_i = \max(|M_i|, |m_i|) \\ M_i' = -m_i = \max(|M_i|, |m_i|) \\ M_i' = \max(M_i, -m_i) = \max(|M_i|, |m_i|). \end{array}\right.$$

La demostración para m_i' es análoga.

(b) Si $|m_i| \leqslant |M_i|$, entonces

$$M_i' - m_i' = |M_i| - |m_i| \leqslant |M_i - m_i| = M_i - m_i;$$

si $|M_i| \leqslant |m_i|$, entonces

$$M_i' - m_i' = |m_i| - |M_i| \leqslant |m_i - M_i| = M_i - m_i.$$

(c) Si P es una partición de $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} U(|f|, P) - L(|f|, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= U(f, P) - L(f, P). \end{aligned}$$

De este modo la integral de f implica la de $|f|$, por el teorema 2.

(d) Esto es consecuencia de la parte (c) y de las fórmulas $\max(f, g) = [f + g + |f - g|]/2$, $\min(f, g) = [f + g - |f - g|]/2$.

(e) Si f es integrable, entonces $\max(f, 0)$ y $\min(f, 0)$ son integrables por la parte (d). Recíprocamente, si $\max(f, 0)$ y $\min(f, 0)$ son integrables, entonces $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$ es integrable, según el teorema 5.

32. (a) Al ser

$$0 \leqslant m_i' \leqslant f(x) \leqslant M_i' \text{ y } m_i'' \leqslant g(x) \leqslant M_i'' \text{ para todos los } x \text{ de } [t_{i-1}, t_i],$$

tenemos

$$m_i'm_i'' \leqslant f(x)g(x) \leqslant M_i'M_i'' \qquad \text{para todos los } x \text{ de } [t_{i-1}, t_i],$$

lo cual implica que $m_i'm_i'' \leqslant m_i$ y que $M_i \leqslant M_i'M_i''$.

(b) Esto es consecuencia inmediata de la parte (*a*).

(c) Por la parte (b),

$$\begin{aligned} U(fg, P) - L(fg, P) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} [M_i'M_i'' - m_i'm_i''](t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i''[M_i' - m_i'](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i'[M_i'' - m_i''](t_i - t_{i-1}) \\ &\leqslant M \left\{ \sum_{i=1}^{n} [M_i' - m_i'](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} [M_i'' - m_i''](t_i - t_{i-1}) \right\}. \end{aligned}$$

(d) La integrabilidad de fg es consecuencia inmediata de la parte (c) y del teorema 2.

(e) $f \cdot g = g \cdot \max(f, 0) + g \cdot (-\min(f, 0))$ que son ambos integrables según la parte (d).

33. (a) La demostración que sigue está realizada según el problema 1-18(b). Si $g = 0$, entonces lo que vale es la igualdad. En otro caso tenemos

$$0 \leqslant \int_a^b (f - \lambda g)^2 = \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2,$$

con lo que

$$\int_a^b f^2 - \frac{4\left(\int_a^b fg\right)^2}{4\left(\int_a^b g^2\right)} \geqslant 0.$$

(No es posible obtener la desigualdad estricta cuando $f \neq \lambda g$, ya que podría ser $\int_a^b (f - \lambda g) = 0$ aun siendo $f \neq \lambda g$; véase la parte (b).)

(b) Si es $f = g$ excepto en un punto, vale entonces la igualdad aun cuando no sea $f = \lambda g$. Pero si f y g son continuas, y $g \neq 0$, entonces es $f = \lambda g$ para algún λ, ya que si fuera $f \neq \lambda g$ para todos los λ, entonces se cumpliría

$$0<\int_a^b (f-\lambda g)^2 = \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2,$$

ya que $(f-\lambda g)^2$ sería una función continua no-negativa y en algún punto positiva. Esto implicaría la desigualdad estricta en la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

(c) Dados $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$, sean f y g definidas en $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x_i, & \dfrac{i-1}{n} \leqslant x < \dfrac{i}{n} \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} y_i, & \dfrac{i-1}{n} \leqslant x < \dfrac{i}{n} \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\int_0^1 fg = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
$$\int_0^1 f^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$
$$\int_0^1 g^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

con lo que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right);$$

esta es la desigualdad de Schwartz. (El problema 1-18 es, en realidad, el caso particular $n = 2$, pero las demostraciones de dicho problema son aplicables para todo n.)

(d) Aplíquese la desigualdad de Schwartz a f y a g con $g(x) = 1$ en $[0, 1]$. El resultado correcto para $[a, b]$ es

$$\left(\int_a^b f \right)^2 \leqslant (b-a) \left(\int_a^b f^2 \right).$$

34. Si $\epsilon > 0$, tómese $N \geqslant 0$ tal que $|f(t) - a| < \epsilon$ para $t \geqslant N$. Entonces para $N \geqslant 0$ tenemos

$$\left| \int_N^{N+M} f(t)\, dt - Ma \right| < \epsilon M,$$

con lo que

$$\left| \frac{1}{N+M} \int_{N}^{N+M} f(t)\, dt - \frac{Ma}{N+M} \right| < \frac{\epsilon M}{N+M} < \epsilon.$$

Tómese M tal que

$$\left| \frac{Ma}{N+M} - a \right| < \epsilon \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{N+M} \int_{1}^{N} f(t)\, dt \right| < \epsilon.$$

Entonces

$$\left| \frac{1}{N+M} \int_{1}^{N+M} f(t)\, dt - a \right| < 3\epsilon.$$

CAPÍTULO 14

1. (ii) $$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^6\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)+\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)^2}\cdot \operatorname{sen}^3 x.$$

(iv) $$\frac{-1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}.$$

(vi) $$\cos\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\,dt\right)dy\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dt\right).$$

(viii) $$(F^{-1})'(x)=\frac{1}{F'(F^{-1}(x))}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-[F^{-1}(x)]^2}}}=\sqrt{1-[F^{-1}(x)]^2}.$$

2. (ii) En todos los $x\neq 1$.

(vi) En todos los x irracionales.

(vi), (viii) En todos los x que no son de la forma $1/n$ para algún número natural n.

3. (ii)

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(0)&=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(f^{-1}(0)))}\\&=\frac{1}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1))}.\end{aligned}$$

5. Si $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x xf(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$, entonces

$$F'(x)=[xf(x)+\int_0^x f(u)\,du]-xf(x)\qquad \text{por el problema 4}$$

$$= \int_0^x f(u)\, du.$$

En consecuencia, existe un número c tal que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du + c \qquad \text{para todo } x.$$

Está claro que $c = 0$, ya que cada uno de los otros dos términos es 0 para $x = 0$.

6. Aplicando el problema 5 a $g(u) = f(u)(x-u)$, obtenemos

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\, du = \int_0^x [f(u)(x-u)](x-u)\, du$$
$$= \int_0^x \left(\int_0^u f(t)(x-t)\, dt \right) du.$$

Tenemos que demostrar por lo tanto que

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)(x-t)\, dt \right) du = 2 \int_0^x \left(\int_0^{u_2} \left(\int_0^{u_1} f(t)\, dt \right) du_1 \right) du_2.$$

Ahora bien, $x - t = (u-t) + (x-u)$, con lo que

$$(1) \quad \int_0^u f(t)(x-t)\, dt = \int_0^u f(t)(u-t)\, dt + \int_0^u f(t)(x-u)\, dt.$$

Para la primera integral de la derecha tenemos

$$(2) \quad \int_0^u f(t)(u-t)\, dt = \int_0^u \left(\int_0^{u_1} f(t)\, dt \right) du_1$$

por el problema 5. La segunda puede ponerse en la forma

$$(3) \quad \int_0^u f(t)(x-u)\, dt = (x-u) \int_0^u f(t)\, dt.$$

Por (1), (2) y (3) tenemos

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)(x-t)\, dt \right) du = \int_0^x \left(\int_0^u \left(\int_0^{u_1} f(t)\, dt \right) du_1 \right) du$$
$$+ \int_0^x \left[(x-u) \int_0^u f(t)\, dt\right] du.$$

Aplicando, por otra parte, el problema 5 a $g(u) = \int_0^u f(t)\, dt$ obtenemos

$$\int_0^x [(x-u)\int_0^u f(t)\,dt]\,du = \int_0^x \left(\int_0^u \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right) du.$$

8. (a) Esto se sigue del problema 13-11, ya que $f(x-a) = f(x)$ para todo x.

   (b) Supongamos que g sea periódica y continua con $g \geqslant 0$ (por ejemplo, $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$). Si $f(x) = \int_0^x g$, entonces $f' = g$ es periódica, pero f es creciente, por lo que no puede ser periódica.

   (c) Sea $g(x) = f(x+a)$. Entonces $g'(x) = f'(x+a) = f'(x)$. Si $f(a) = f(0)$, tenemos también entonces $g(0) = f(a) = f(0)$. En consecuencia $g = f$, es decir, $f(x+a) = f(x)$ para todo x.

   Por otra parte, si f es periódica con período a, entonces es por seguro $f(a) = f(0)$. En realidad el problema, tal como ha sido formulado, es más difícil, ya que no se estableció que el período tuviera que ser a. Dicho de otro modo, hay que demostrar todavía que si f es periódica con un período $b \neq a$, entonces $f(a) = f(0)$ (y en consecuencia f es también periódica con período a). Esto puede hacerse como sigue. Supóngase que $f(a) \neq f(0)$ y pongamos que sea $f(a) > f(0)$. Puesto que la función $g(x) = f(x+a) - f(x)$ satisface $g'(x) = f'(x+a) - f'(x) = 0$, se sigue que $g(x) = g(0) = f(a)$, con lo que $f(x+a) = f(x) + f(a)$ para todo x. En consecuencia $f(na) = n \cdot f(a) > f(0)$ para todos los números naturales n. Además, puede darse un enunciado más fuerte. Al ser f continua y $f(a) > f(0)$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > f(0)$ para $|x-a| < \epsilon$; la relación $f(x+a) = f(x) + f(a)$ implica que tenemos también $f(x) > f(0)$ para $|x - na| < \epsilon$. Si suponemos que f es periódica con período b, entonces $f(mb) = f(0)$ para todos los números naturales m. Esto nos llevará a una contradicción si logramos demostrar que para algún n y algún m tenemos $|mb - na| < \epsilon$, o de modo equivalente,

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\epsilon}{bn}.$$

   Está claro que esto se cumple si a/b es racional. Si a/b es irracional la desigualdad deseada es entonces consecuencia del hecho de que para cualquier número irracional α existen infinitos números racionales m/n con

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$$

   Si bien la demostración de este hecho no es particularmente difícil, no la vamos a dar aquí. El lector interesado puede intentar por su cuenta una demostración o bien consultar la referencia[4]de las Referencias Bibliográficas, donde se demuestra este resultado a más de otros muchos con él relacionados.

10. Sean $F = \int_0^x f$ y $G = \int_0^x f^{-1}$. Entonces el problema 13-16 establece que

$$\begin{aligned} G(x) = \int_0^x f^{-1} &= xf^{-1}(x) - \int_0^{f^{-1}(x)} f \\ &= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)). \end{aligned}$$

En consecuencia, $G'(x) = f^{-1}(x)$.

11. (a) $F'(x) = 1/x$; $G'(x) = (1/bx) \cdot b = 1/x$.

    (b) De la parte (a) se sigue que existe un c tal que $F(x) = G(x) + c$ para todo $x > 0$. Al ser $F(1) = 0 = G(1)$, tenemos $F(x) = G(x)$ para todo $x > 0$.

12. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < 0 < f(b)$. El teorema fundamental del Cálculo demuestra que $f = F'$ para algún F (a saber, $F(x) = \int_0^x f$). El teorema de Darboux implica entonces que $f(x) = 0$ para algún x de $[a, b]$.

13. Tenemos

$$F(x) = \int_{f(x)}^{a} h(t)\,dt + \int_{a}^{g(x)} h(t)\,dt,$$

con lo que

$$F'(x) = -h(f(x)) \cdot f'(x) + h(g(x)) \cdot g'(x).$$

14. (a) La ecuación (*) dice precisamente que $(G \circ y)' = F'$ en el intervalo, con lo que existe un c tal que $G \circ y = F + c$ en este intervalo, es decir, $G(y(x)) = F(x) + c$ para todos los x del intervalo.

    (b) Recíprocamente, si y satisface (**), entonces por derivación se obtiene (*).

    (c) Si

$$y'(x) = \frac{1 + x^2}{1 + y(x)},$$

con lo que

$$[1 + y(x)]y'(x) = 1 + x^2,$$

existe entonces un c tal que

$$y(x) + \frac{y^2(x)}{2} = x + \frac{x^3}{3} + c$$

para todos los x del intervalo en que está definido y. Así pues,

$$y^2(x) + 2y(x) - 2x - \frac{2}{3}x^3 - c = 0,$$

(poniendo simplemente c en vez de $2c$)

con lo que

$$y(x) = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4\left(x + \frac{2}{3}x^3 + c\right)}}{2}$$

o

$$y(x) = \frac{-2 - \sqrt{4 + 4\left(x + \frac{2}{3}x^3 + c\right)}}{2}.$$

Estas soluciones no están nunca definidas en todo **R**, ya que $4 + 4(x + 2x^3/3 + c) < 0$ para $x < 0$ con $|x|$ suficientemente grande.

(d) Si

$$(1 + 5[y(x)]^4)y'(x) = -1,$$

existe entonces una constante c tal que

$$[y(x)]^5 + y(x) + x = c.$$

(e) Si $y(x)y'(x) = -x$, existe entonces un c tal que

$$\frac{[y(x)]^2}{2} = \frac{-x^2 + c}{2},$$

con lo que

$$y(x) = \sqrt{c - x^2}$$

o

$$y(x) = -\sqrt{c - x^2}.$$

Si $y(0) = -1$, está claro entonces que $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (para $|x| < 1$).

15. (a)

$$\int_1^\infty x^r\, dx = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1} = \frac{-1}{r+1}$$

(ya que $r + 1 < 0$, con lo que $\lim_{N\to\infty} N^{r+1} = 0$).

(b) El problema 13-12 implica que

$$\int_1^{2^n} \frac{1}{x}\, dx = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx + \dots + \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx}_{n \text{ veces}}$$

$$= n \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

Al ser $\int_1^2 1/x\, dx > 0$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \int_1^{2^n} 1/x\, dx = \infty$.

(c) La función $I(N) = \int_0^N g$ es claramente creciente, y está acotada superiormente por $\int_0^\infty f$. En consecuencia, $\lim_{N\to\infty} I(N)$ existe (es el supremo de $\{I(N)\colon N \geqslant 0\}$).

(d) Está claro que $\int_0^\infty 1/(1 + x^2)\, dx$ existe si $\int_1^\infty 1/(1 + x^2)\, dx$ existe; esta última integral existe por la parte (c), ya que $\int_1^\infty 1/x^2\, dx$ existe por la parte (a), y $1/(1 + x^2) \leqslant 1/x^2$.

16. (a) Está claro que $\int_{-\infty}^0 1/(1 + x^2)\, dx$ existe; es, en efecto, igual a $\int_0^\infty 1/(1 + x^2)\, dx$.

(b) $\int_0^\infty x\, dx$ no existe.

(c) Si $\lim_{N\to\infty} h(N) = \infty$ y $\lim_{N\to\infty} g(N) = -\infty$ y existe $\int_{-\infty}^\infty f$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \int_{g(N)}^{h(N)} f = \int_{-\infty}^\infty f.$$

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, tómese M_0 tal que $\left| \int_0^\infty f - \int_0^M f \right| < \epsilon/2$ y $\left| \int_{-\infty}^0 f - \int_{-M}^0 f \right| < \epsilon/2$ para todo $M > M_0$. Tómese ahora N tal que $h(N) > M$ y $g(N) < -M$ para todo $N > N_0$. Tenemos entonces, para $N > N_0$,

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f - \int_{g(N)}^{h(n)} f \right| \leqslant \left| \int_0^\infty f - \int_0^{h(N)} f \right| + \left| \int_{-\infty}^0 f - \int_{g(N)}^0 f \right| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

17. (a)

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} 2\sqrt{a} - 2\sqrt{\epsilon} = 2\sqrt{a}.$$

(b)

$$\int_0^a x^r\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^a x^r\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{\epsilon^{r+1}}{r+1} = \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

(ya que $r + 1 > 0$, con lo que $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{r+1} = 0$).

(c) El problema 13-12 implica que

$$\underbrace{\int_{1/2^n}^1 \frac{1}{x}\, dx + \dots + \int_{1/2^n}^1 \frac{1}{x}\, dx}_{n \text{ veces}} = \int_2^1 \frac{1}{x}\, dx,$$

con lo que

$$\int_{1/2^n}^1 \frac{1}{x}\, dx = -n \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx,$$

así que $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 1/x\, dx$ no existe. Esto implica, por supuesto, que $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^a 1/x\, dx$ no existe para ningún $a > 0$.

(d)

$$\int_a^0 |x|^r\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^-} \int_a^\epsilon |x|^r\, dx$$

$$= -\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^a x^r\,dx$$

$$= -\frac{a^{r+1}}{r+1}.$$

(e) Al ser $\lim_{x \to 1} 1/\sqrt{1-x^2} = \lim_{x \to -1} 1/\sqrt{1-x^2} = \infty$, tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{\epsilon \to -1^+} \int_\epsilon^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{\epsilon \to 1^-} \int_0^\epsilon \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2 \lim_{\epsilon \to -1^+} \int_\epsilon^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Pero el límite

$$\lim_{\epsilon \to -1^+} \int_\epsilon^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

existe, por la parte (a). Para $-1 < x < 0$ tenemos

$$x(1+x) < 0,$$
$$x < -x^2,$$
$$1 + x < 1 - x^2,$$
$$\sqrt{1+x} < \sqrt{1-x^2},$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{\epsilon \to -1^+} \int_\epsilon^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

existe también.

18. (a)

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 2 + 1 = 3,$$

de acuerdo con los problemas 17(a) y 15 (a).

(b) Si $-1 < r < 0$, entonces $\int_1^\infty x^r\,dx$ no existe, ya que $x^r \geqslant x^{-1}$ para $x \geqslant 1$ y $\int_1^\infty x^{-1}\,dx$ no existe. Si $x < -1$, entonces $\int_0^1 x^r\,dx$ no existe, ya que $x^r \geqslant x^{-1}$ para $0 < x \leqslant 1$ y $\int_0^1 x^{-1}\,dx$ no existe. (Por supuesto, si $r > 0$, entonces $\int_1^\infty x^r\,dx$ no existe.)

CAPÍTULO 15

1. (ii) $$\frac{1}{\sqrt{1-[\text{arc tan}(\text{arc cos } x)]^2}} \cdot \frac{1}{1+(\text{arc cos } x)^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iv) $$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-1}{1+x^2}.$$

(Este resultado no debe sorprender, ya que $f(x) = \text{arc tan } 1/x = \pi/2 -$ $- \text{arc tan } x$.)

2. (ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x - x + x^3/6}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen } x + x}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{24} = 0.$$

(iv)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen } x + x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{24} = \frac{1}{24}.$$

(vi)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x}=0.$$

3. (a)

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}=0.$$

(b) Al ser

$$f'(x)=\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\qquad \text{para } x\neq 0,$$

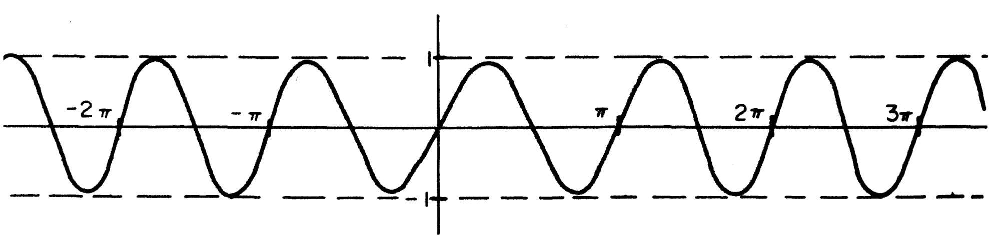
tenemos

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h\cos h - \operatorname{sen} h}{h^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - h\operatorname{sen} h - \cos h}{3h^2}$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

4. (a)

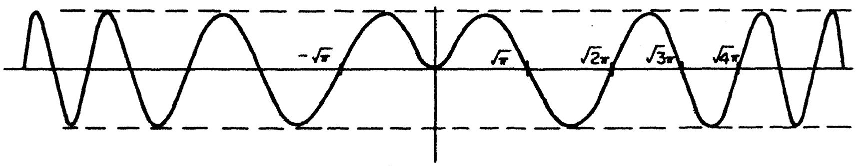


(b) Está claro que $f(x)=0$ para $x=\sqrt{k\pi}$. Los números $\sqrt{k\pi}$ se hacen, por supuesto tan grandes como se quiera (ya que $\sqrt{k^2\pi}>k$), pero también es verdad que se acercan cada vez más entre sí (ya que, por ejemplo

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ para un x de $(k, k+1)$,

según el teorema del valor medio

$$<\frac{1}{2\sqrt{k}}).$$



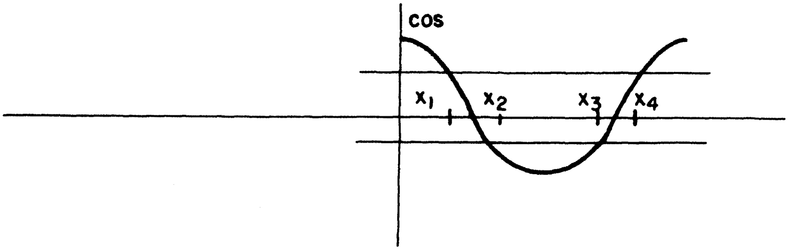
(c) Si

$$\begin{aligned} 0=f'(x) &= \cos x+2\cos 2x=\cos x+2(\cos^2 x-[1-\cos^2 x]) \\ &= \cos x+2(2\cos^2 x-1) \\ &= 4\cos^2 x+\cos x-2, \end{aligned}$$

entonces

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1+32}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}.$$

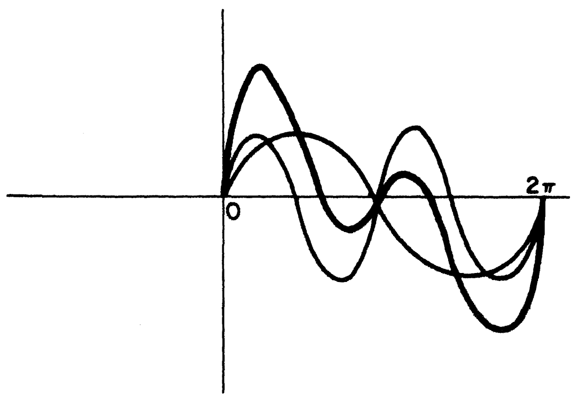
Puesto que $0<[-1+\sqrt{33}]/8<1$ y $-1<[-1-\sqrt{33}]/8<0$, habrá cuatro x de éstos en $[0, 2\pi]$:



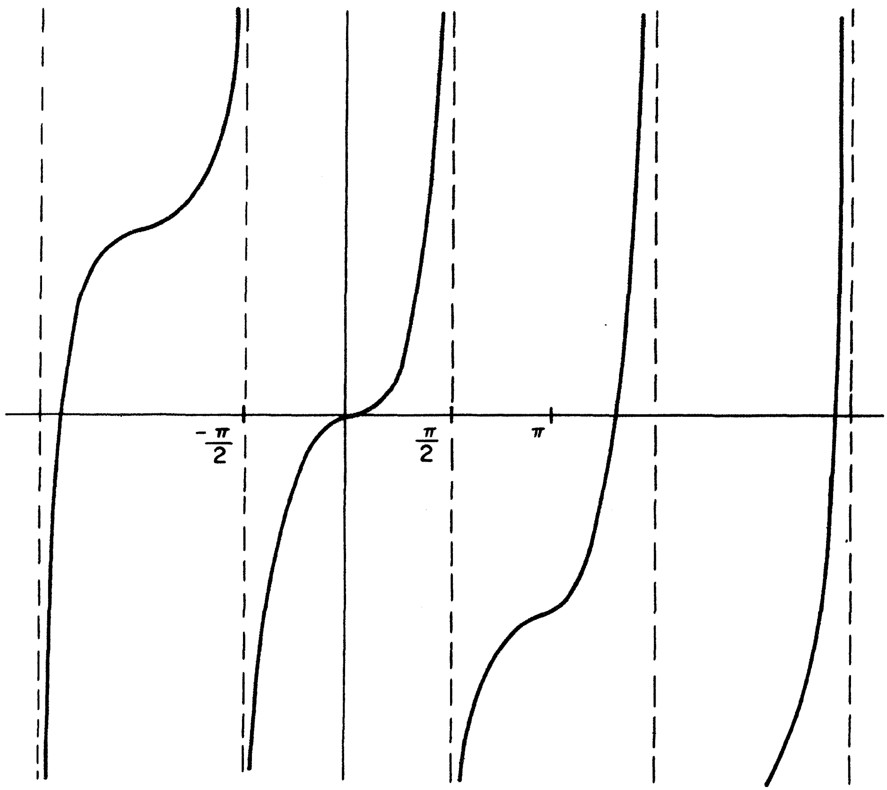
Los puntos críticos x_1 y x_4, con $\cos x_1 = \cos x_4 = [-1 + \sqrt{33}]/8$, satisfacen $0 < x_1 < \pi/2$ y $3\pi/4 < x_4 < 2\pi$; así pues, $f(x_1) > 0$ y $f(x_2) < 0$, ya que sen x y sen $2x$ son ambos positivos en $(0, \pi/2)$ y ambos negativos en $(3\pi/4, 1)$. Para determinar el signo de $f(x_3)$ y de $f(x_4)$ obsérvese que

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x \\ &= \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ &= \operatorname{sen} x (1 + 2 \cos x). \end{aligned}$$

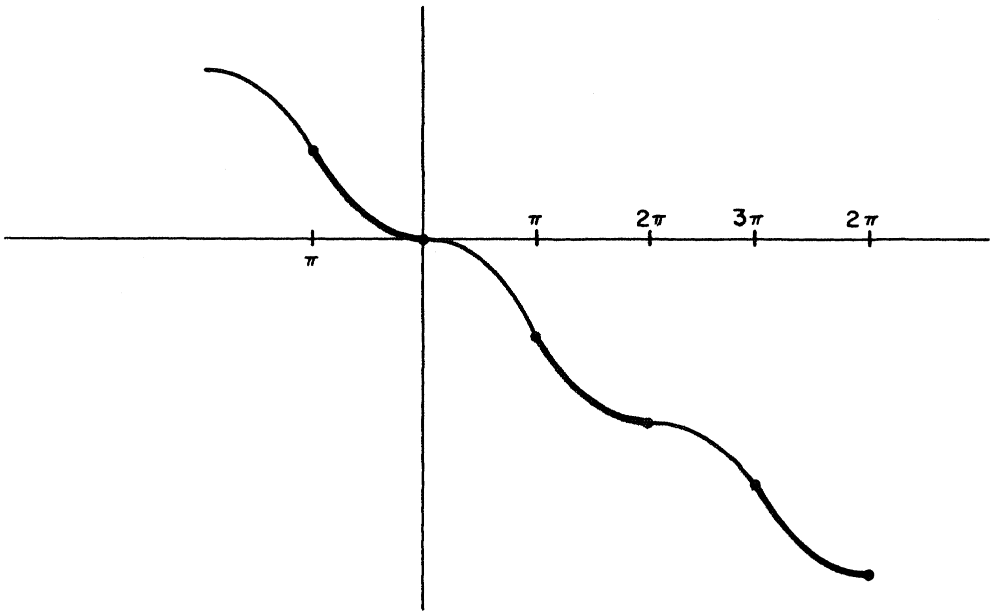
Tenemos ahora que sen $(x_2) > 0$, ya que $0 < x_2 < \pi$, pero $1 + 2 \cos (x_2) < 0$, con lo que $f(x_2) < 0$.
Análogamente, $f(x_3) > 0$.



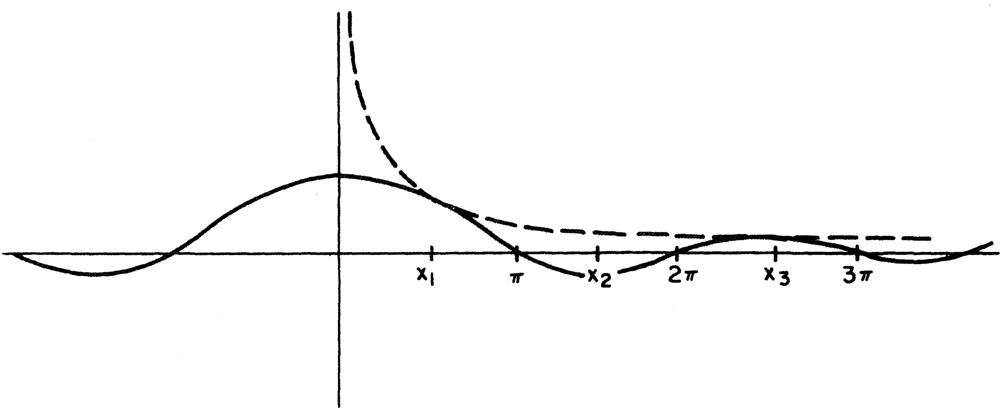
(d) $f'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x \geqslant 0$ para todo x, con lo que f es siempre creciente. En $(-\pi/2, \pi/2)$ f crece claramente desde $-\infty$ hasta ∞. En $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ la derivada f' es la misma que en $(-\pi/2, \pi/2)$, con lo que f difiere en una constante de f en $(-\pi/2, \pi/2)$. La constante es claramente $-\pi$.



(e) $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ para todo x, con lo que f es decreciente. Además, f' es periódica, con lo que f es la misma en $[2\pi, 4\pi]$ que en $[0, 2\pi]$ salvo un desplazamiento hacia abajo de 2π. Al ser $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, se sigue del apéndice al Capítulo 11 que f es cóncava en $[0, \pi]$ y convexa en $[\pi, 2\pi]$.



(f) Si $0 = f'(x) = (x \cos x - \operatorname{sen} x)/x^2$, entonces $x = \tan x$. La gráfica de la parte (d) hace ver que a la derecha del eje vertical esto ocurre para $0 < x_1 < x_2 < \ldots$, donde x_n es ligeramente inferior a $n\pi + \pi/2$.



5. Para cualquier número particular y, defínase $f(x) = \cos(x + y)$. Entonces

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x + y),$$
$$f''(x) = -\cos(x + y),$$

con lo que

$$f'' + f = 0,$$
$$f(0) = \cos y,$$
$$f'(0) = -\operatorname{sen} y.$$

Así pues,

$$f = (-\operatorname{sen} y) \cdot \operatorname{sen} + (\cos y) \cdot \cos,$$

con lo que

$$\cos(x + y) = \cos y \cos x - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

7. (a) Está claro que $f(x) = A \operatorname{sen}(x + B)$ satisface $f + f'' = 0$. [Además, $a = f'(0) = A \cos B$ y $b = f(0) = A \operatorname{sen} B$.]

(b) Está claro que basta elegir A y B de modo que $a = A \cos B$ y $b = A \operatorname{sen} B$. Puesto que queremos que sea

$$a^2 + b^2 = (A \cos B)^2 + (A \operatorname{sen} B)^2$$

está claro que debemos hacer

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $a \neq 0$, podemos hacer

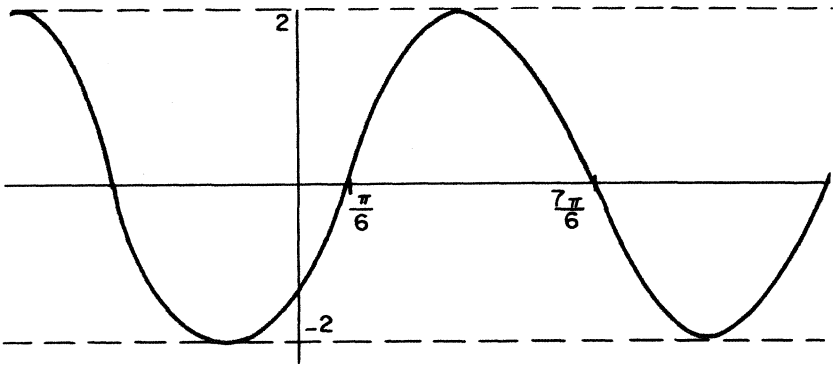
$$B = \operatorname{arc\,tan} \frac{b}{a}.$$

Si $a = 0$, podemos hacer $B = \pi/2$.

(c) $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = A \operatorname{sen}(x + B)$, donde

$$A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$$
$$B = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6,$$

con lo que $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 2 \operatorname{sen}(x + \pi/6)$.



9. Partiendo de la fórmula del seno de una suma, obtenemos, para $|\alpha| \leqslant 1$ y $|\beta| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta) &= \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} \alpha) \cos(\operatorname{arc\,sen} \beta) \\ &\quad + \cos(\operatorname{arc\,sen} \alpha) \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} \beta) \\ &= \alpha \sqrt{1-\beta^2} + \beta \sqrt{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\operatorname{arc\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta = \operatorname{arc\,sen}(\alpha \sqrt{1-\beta^2} + \beta \sqrt{1-\alpha^2}),$$

siempre que sea $-\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta \leqslant \pi/2$. (Si $\pi/2 < \operatorname{arc\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta \leqslant \pi$, tenemos que sustituir el segundo miembro por $\pi - \operatorname{arc\,sen}(\alpha \sqrt{1-\beta^2} + \beta \sqrt{1-\alpha^2})$, y si $-\pi \leqslant \operatorname{are\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta < \pi/2$, tenemos que sustituirlo por $-\pi - \operatorname{arc\,sen}(\alpha \sqrt{1-\beta^2} + \beta \sqrt{1-\alpha^2})$.)

12. (a) Si

$$H(a) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a \cos nx)^2 \, dx$$

$$= a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx - 2a \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx,$$

entonces se presenta el mínimo para

$$0 = H'(a) = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

con lo que

$$a = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

según el problema 11. La demostración para sen nx es análoga.

(b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx \right] \right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx \right] dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{c_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \cos^2 nx + d_n^2 \operatorname{sen}^2 nx \right] dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n,\, m=1}^{N} c_n \, d_m \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_0}{2} \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - 2\pi \left(\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n c_n + b_n d_n \right) + \pi \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + d_n^2 \right),$$

aplicando el problema 11, la definición de a_n y b_n y el hecho de que la última integral se anula por ser $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = 0.$ La segunda igualdad se deduce por cálculo algebraico.

13. Haciendo las sustituciones $a = (x + y)/2$, $b = (x - y)/2$ en

$$\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos(-b) + \cos a \operatorname{sen}(-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b$$

se obtiene

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

Análogamente, a partir de

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b) = 2 \cos a \cos b$$

obtenemos

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

15. Si $y = \text{arc tan } x$, entonces

$$x = \tan\, y = \frac{\text{sen } y}{\cos\, y} = \frac{\text{sen } y}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}},$$

con lo que

$$\begin{aligned} x\sqrt{1 - \text{sen}^2\, y} &= \text{sen } y, \\ x^2(1 - \text{sen}^2\, y) &= \text{sen}^2\, y, \\ \text{sen}^2\, y &= \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\text{sen}\,(\text{arc tan } x) = \text{sen } y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\cos\,(\text{arc tan } x) = \cos\, y = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

16. Si $x = \tan u/2$, entonces $u = 2 \text{ arc tan } x$, con lo que por el problema 15

$$\begin{aligned} \text{sen } u &= \text{sen}\,(2 \text{ arc tan } x) \\ &= 2 \text{ sen}\,(\text{arc tan } x) \cos\,(\text{arc tan } x) \\ &= \frac{2x}{1 + x^2}, \\ \cos\, u &= \sqrt{1 - \text{sen}^2\, u} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

17. (a) Por la fórmula de la suma

$$\text{sen}\,(x + \pi/2) = \text{sen } x \cos \pi/2 + \cos x \text{ sen } \pi/2 = \cos x.$$

(b) La parte (a) implica que $x + \pi/2 = \text{arc sen}\,(\text{eos } x)$ para $-\pi/2 \leqslant x + \pi/2 \leqslant \pi/2$, lo que equivale a $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. Si $x = 2k\pi + x'$ para $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, entonces $\cos x = \cos x'$, y si $x = 2k\pi + x'$ para $0 \leqslant x' \leqslant \pi$, entonces $\cos x = \cos x' = \cos\,(-x')$. Por lo tanto

$$\text{arc sen}\,(\cos x) = \begin{cases} x - 2k\pi + \pi/2, & (2k - 1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi \\ 2k\pi + \pi/2 - x, & 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi. \end{cases}$$

Análogamente, a partir de

$$\cos\,(x - \pi/2) = \text{sen } x,$$

se deduce que

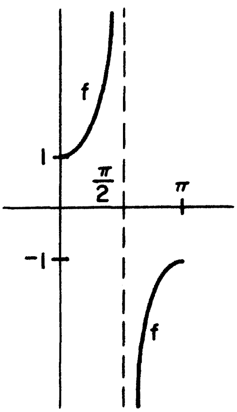
$$\operatorname{arc\,cos}(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} x - 2k\pi - \pi/2, & 2k\pi + \pi/2 \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi + \pi/2, \\ (2k+1)\pi - \pi/2 - x, & 2k\pi - \pi/2 \leqslant x \leqslant 2k\pi + \pi/2. \end{cases}$$

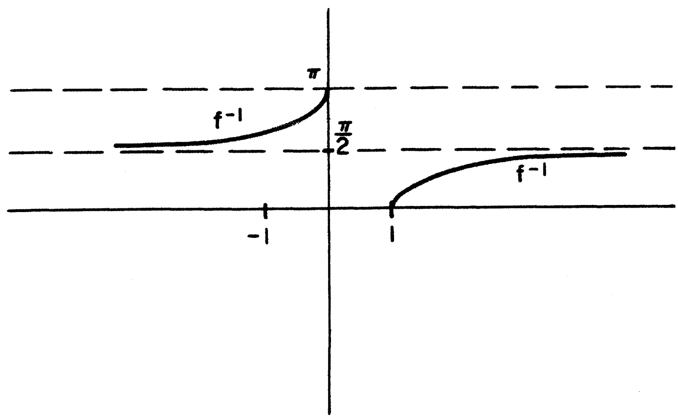
21. Si (x, y) está sobre el círculo unidad, entonces $x^2 + y^2 = 1$. En particular $|x^2| \leqslant 1$, con lo que $-1 \leqslant x \leqslant 1$. En los intervalos $[0, \pi]$ y $[-\pi, 0]$ la función coseno toma todos los valores entre -1 y 1, por lo que existe un θ en $[0, \pi]$ con $x = \cos\theta$, y también un θ en $[-\pi, 0]$ con $x = \cos\theta$. Si $y \geqslant 0$, entonces $y = \operatorname{sen}\theta$ cuando está en $[0, \pi]$, y si $y \leqslant 0$, entonces $y = \operatorname{sen}\theta$ cuando θ está en $[-\pi, 0]$

22. (a) Si $a < 2k\pi + \pi/2 < b$, entonces el seno deja de ser uno-uno en $[a, b]$, ya que tiene un máximo en $2k\pi + \pi/2$, por lo que toma todos los valores ligeramente inferiores a 1 a ambos lados de $2k\pi + \pi/2$. Análogamente, no se puede tener tampoco $a < 2k\pi - \pi/2 < b$. Puesto que los números de la forma $2k\pi \pm \pi/2$ distan π uno de otro, la longitud máxima de un intervalo $[a, b]$ en donde el seno es uno-uno es π, y en tal caso $[a, b]$ tiene que ser de la forma $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ o $[2k\pi + \pi/2, 2(k+1)\pi - \pi/2]$.

(b) $(g^{-1})'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$, ya que $g^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x + 2k\pi$.

23. El dominio de f^{-1} es $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.





24. Según el teorema del valor medio

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| &= |x - y| \cdot |\cos\theta| \qquad \text{para algún } \theta \text{ entre } x \text{ e } y \\ &\leqslant |x - y|. \end{aligned}$$

Vale la desigualdad estricta salvo que sea $\theta = 2k\pi$. Pero en todo caso si, por ejemplo, es $x<y$, podemos tomar entonces $x<z<y$ de manera que (x, z) no contenga ningún número de la forma $2k\pi$. Entonces

$$\begin{aligned}\text{sen } y - \text{sen } x &= (\text{sen } y - \text{sen } z) + (\text{sen } z - \text{sen } x)\\ &= (y-z) \cos \theta_1 + (z-x) \cos \theta_2\end{aligned}$$

para algún θ_1 de (y, z) y algún θ_2 de (x, z). Al ser $|\cos \theta_1| \leqslant 1$ y $|\cos \theta_2| < 1$, se sigue que

$$|\text{sen } y - \text{sen } x| < |y-x|.$$

25. (a)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_c^d \text{sen } \lambda x \, dx = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\cos \lambda c}{\lambda} - \frac{\cos \lambda d}{\lambda} = 0\,.$$

(b) Si s tiene el valor s_i de (t_{i-1}, t_i), entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b s(x) \text{ sen } \lambda x \, dx &= \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{i=1}^n s_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \text{sen } \lambda x \, dx\\ &= 0, \text{ por la parte (a).}\end{aligned}$$

(c) Para todo $\epsilon > 0$ existe, según el problema 13-17, una función en escalera $s \leqslant f$ con

$$\int_a^b [f(x) - s(x)] \, dx < \epsilon.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x) \text{ sen } \lambda x \, dx - \int_a^b s(x) \text{ sen } \lambda x \, dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x)-s(x)] \text{ sen } \lambda x \, dx\right|\\ &\leqslant \int_a^b [f(x)-s(x)]\, |\text{sen } \lambda x| \, dx\\ &\leqslant \int_a^b [f(x)-s(x)] \, dx < \epsilon.\end{aligned}$$

La parte (b) hace ver entonces que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left|\int_a^b f(x) \text{ sen } \lambda x \, dx\right| < \epsilon.$$

Al cumplirse esto para todo $\epsilon > 0$, el límite tiene que ser 0.

26. (a) Tenemos

$$\text{área } OAB < \frac{x}{2} < \text{área } OCB,$$

con lo que

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{sen } x}{2 \cos x}.$$

(b) Partiendo de

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2}$$

obtenemos

$$\frac{\text{sen } x}{x} < 1;$$

a partir de

$$\frac{x}{2} < \frac{\text{sen } x}{2 \cos x}$$

obtenemos

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x}.$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, se deduce que $\lim\limits_{x \to 0} (\text{sen } x)/x = 1$.

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{eos}^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\text{sen}'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h} \cos x + \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \text{ sen } x \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

27. (a) Está claro que α es impar y creciente. El límite $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$, es decir, la integral impropia $\int_0^{\infty} (1 + t^2)^{-1}\, dt$, existe según el problema 14-15.

(b)

$$(\alpha^{-1})'(x) = \frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{1}{1 + [\alpha^{-1}(x)]^2}} = 1 + [\alpha^{-1}(x)]^2.$$

(c) Si $-\pi/2 < x < \pi/2$, entonces

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + [\alpha^{-1}(x)]^2}} = (1 + [\alpha^{-1}(x)]^2)^{-1/2},$$

con lo que

$$\cos'(x) = -\alpha^{-1}(x)\,(\alpha^{-1})'(x)\,(1 + [\alpha^{-1}(x)]^2)^{-3/2}$$
$$= -\alpha^{-1}(x)\,(1 + [\alpha^{-1}(x)]^2)^{-1/2}$$
$$= -\tan x \cos x.$$

Vale, naturalmente, el mismo resultado si x no es de la forma $k\pi + \pi/2$ o $k\pi - \pi/2$. (Para los x de esta forma tenemos, según el teorema 11-7,

$$\cos'(x) = \lim_{y\to x} \cos'(y)$$
$$= \lim_{y\to x} -\tan y \cos y$$
$$= \lim_{y\to x} \frac{-\tan y}{\sqrt{1 + \tan^2 y}}$$
$$= -1, \qquad \text{ya que } \lim_{y\to x} \tan x = \infty.)$$

Para los x que no son de la forma $k\pi + \pi/2$ o $k\pi - \pi/2$ tenemos ahora

$$\cos''(x) = -\tan x \cos'(x) - \tan'(x) \cos x$$
$$= -\tan^2 x \cos x - [1 + \tan^2 x] \cos x \qquad \text{por la parte (b)}$$
$$= -\cos x.$$

Para los x que son de esta forma tenemos

$$\cos''(x) = \lim_{y\to x} \cos''(y) = \lim_{y\to x} -\cos y,$$

$$= \lim_{y\to x} \frac{-1}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = 0, \qquad \text{ya que } \lim_{y\to x} \tan y = \infty.$$

28. (a) $(y_0^2 + (y_0')^2)' = 2y_0y_0' + 2y_0'y_0'' = 2y_0'(y_0' + y_0'') = 0$, con lo que $y_0^2 + (y_0')^2$ es constante. La constante es distinta de cero, ya que y_0 no es siempre 0 y por lo tanto $y_0(0)^2 + y_0'(0)^2 \neq 0$, o bien $y_0(0) \neq 0$, o bien $y_0'(0) \neq 0$.

(b) Cualquier función $s = ay_0 + by_0'$ satisface $s'' + s = 0$, por lo que nos basta elegir a y b tales que

$$ay_0(0) + by_0'(0) = 0$$
$$ay_0'(0) - by_0(0) = 1.$$

Esto es posible siempre, ya que

$$-y_0(0)^2 - y_0'(0)^2 \neq 0.$$

(c) Supóngase que es $\cos x > 0$ para todos los $x > 0$. Entonces el seno sería creciente, ya que $\text{sen}' = \cos$. Al ser $\text{sen } 0 = 0$, esto significaría que $\text{sen } x > 0$ para todos los $x > 0$. Tendríamos así $\cos' = -\text{sen } x < 0$ para todos los $x > 0$, con lo que el coseno sería decreciente. De este modo el coseno satisfaría todas las hipótesis para f en el problema 6 del apéndice al Capítulo 11. Pero entonces el problema implica que $\cos''(x) = -\cos x = 0$ para algún $x > 0$, lo cual es una contradicción.

(d) Al ser $\cos x > 0$ para $0 < x < x_0 = \pi/2$, la función seno es creciente en $[0, \pi/2]$. Al ser $\text{sen } 0 = 0$, se deduce que $\text{sen } \pi/2 > 0$, con lo que $\text{sen } \pi/2 = 1$.

(e)

$$\cos \pi = \cos(\pi/2 + \pi/2) = \cos^2 \pi/2 - \text{sen}^2 \pi/2 = 0 - 1 = -1.$$
$$\text{sen } \pi = \text{sen}(\pi/2 + \pi/2) = 2 \text{ sen } \pi/2 \cos \pi/2 = 0.$$
$$\cos 2\pi = \cos(\pi + \pi) = \cos^2 \pi - \text{sen}^2 \pi = 1.$$
$$\text{sen } 2\pi = \text{sen}(\pi + \pi) = 2 \text{ sen } \pi \cos \pi = 0.$$

(f)

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \cos 2\pi + \cos x \text{ sen } 2\pi = \text{sen } x.$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \text{sen } x \text{ sen } 2\pi = \cos x.$$

29. (a) Una función racional no puede ser 0 en infinitos puntos a no ser que sea 0 en todas partes.

(b) La ecuación supuesta implica que $f_0(x) = 0$ para $x = 2k\pi$, con lo que $f_0 = 0$. Así pues,

$$(\text{sen } x)\,[(\text{sen } x)^{n-1} + f_{n-1}(x)\,(\text{sen } x)^{n-2} + \ldots + f_1(x)] = 0.$$

El término entre corchetes es continuo en 0 excepto quizá para múltiplos de 2π, y por lo tanto es 0 por todas partes. Acabamos de demostrar que si el seno no satisface una tal ecuación para $n-1$, entonces no la satisface tampoco para n. Al no satisfacerla para 1, no la satisface para ningún n.

30. (a) Al multiplicar por ϕ_2 la ecuación en g_1 y por ϕ_1 la ecuación en g_2 obtenemos

$$\phi_1''\phi_2 + g_1\phi_1\phi_2 = 0,$$
$$\phi_2''\phi_1 + g_2\phi_1\phi_2 = 0,$$

Al restar se obtiene la ecuación deseada.

(b)

$$\int_a^b [\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1] = \int_a^b (g_2 - g_1)\phi_1\phi_2 > 0,$$

ya que, según lo supuesto, es $g_2 > g_1$ y $\phi_1\phi_2 > 0$.

Puesto que

$$\begin{aligned}(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2')' &= \phi_1''\phi_2 + \phi_1'\phi_2' - \phi_1'\phi_2' - \phi_1\phi_2'' \\ &= \phi_1''\phi_2 - \phi_1\phi_2'',\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}0 < \int_a^b [\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1] &= [\phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1(b)\phi_2'(b)] - [\phi_1'(a)\phi_2(a) - \phi_1(a)\phi_2'(a)] \\ &= \phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1'(a)\phi_2(a) + [\phi_1(b)\phi_2'(b) - \phi_1(a)\phi_2'(a)].\end{aligned}$$

(c) Si $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$, se deduce entonces de la parte (b) que

$$\phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1'(a)\phi_2(a) > 0.$$

Pero está claro que

$$\phi_2'(a) \geqslant 0, \qquad \phi_2(b) \geqslant 0$$
$$\phi_1'(a) \geqslant 0, \qquad \phi_1'(b) \leqslant 0.$$

Esto implica que

$$\phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1'(a)\phi_2(a) \leqslant 0,$$

lo cual es una contradicción.

(d) Esto se deduce de la parte (c) al sustituir ϕ_1 por $-\phi_1$ y/o ϕ_2 por $-\phi_2$.

31. La ecuación deseada equivale a

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(n+1)x = \operatorname{sen}\left(n+\frac{3}{2}\right)x$$

$$= \operatorname{sen}(n+1)x\cos\frac{x}{2} + \cos(n+1)x\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

y por lo tanto a

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}x\right) = \operatorname{sen}(n+1)x\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(n+1)x,$$

lo cual se deduce de la fórmula de la suma para

$$\operatorname{sen}\left([n+1]x - \frac{1}{2}x\right).$$

32. (a) Si $f(x) = \alpha x + \beta$, entonces para todo P tenemos

$$\ell(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + \alpha^2(t_i - t_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\sqrt{1+\alpha^2}$$

$$= (b-a)\sqrt{1+\alpha^2},$$

y la distancia de $(a, \alpha a + \beta)$ a $(b, \alpha b + \beta)$ es

$$\sqrt{[\alpha(a-b)]^2 + (a-b)^2} = (b-a)\sqrt{1+\alpha^2}.$$

(b) Si f no es lineal, existe entonces algún t en $[a, b]$ tal que $(a, f(a))$, $(t, f(t))$ y $(b, f(b))$ no están sobre una recta. De este modo, si $P = \{a, t, b\}$, entonces

$$\ell(f, P) = \sqrt{(t-a)^2 + [f(t)-f(a)]^2} + \sqrt{(b-t)^2 + [f(b)-f(t)]^2}$$

$$> \sqrt{(b-a)^2 + [f(b)-f(a)]^2}, \qquad \text{según el problema 4-8.}$$

(c) Es consecuencia inmediata de la parte (b).

33. (a) Para cada i existe un x_i en (t_{i-1}, t_i) con

$$f'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(t_{i-1}) - f(t_i).$$

Así pues,

$$L(\sqrt{1+(f')^2}, P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\sqrt{1+[f'(x_i)]^2} \leqslant U(\sqrt{1+(f')^2}, P)$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f'(x_i)(t_i - t_{i-1})]^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}$$
$$= \ell(f, P).$$

(b) Puesto que sup $\{\ell(f, P)\}$ es una cota superior del conjunto de todos los $\ell(f, P)$, es también una cota superior del conjunto de todos los $L(\sqrt{1 + (f')^2}, P)$ según la parte (a).

(c) Basta demostrar que

$$\sup\{\ell(f, P)\} \leqslant U(\sqrt{1 + (f')^2}, P'')$$

para una partición cualquiera P'', y para demostrar esto, basta hacer ver que

$$\ell(f, P') \leqslant U(\sqrt{1 + (f')^2}, P'')$$

para una partición cualquiera P'. Si P contiene los puntos de P', entonces

$$\ell(f, P) \geqslant \ell(f, P');$$

la demostración es parecida a la que se ha visto para las sumas inferiores, introduciendo cada vez un nuevo punto y aplicando el problema 4-8 para ver que esto hace aumentar ℓ. Así pues, si P contiene los puntos tanto de P' como de P'', entonces

$$\ell(f, P') \leqslant \ell(f, P) \leqslant U(\sqrt{1 + (f')^2}, P) \leqslant U(\sqrt{1 + (f')^2}, P'').$$

34. (a) El problema 33 hace ver que

$$\mathcal{L}(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt = \int_x^1 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt.$$

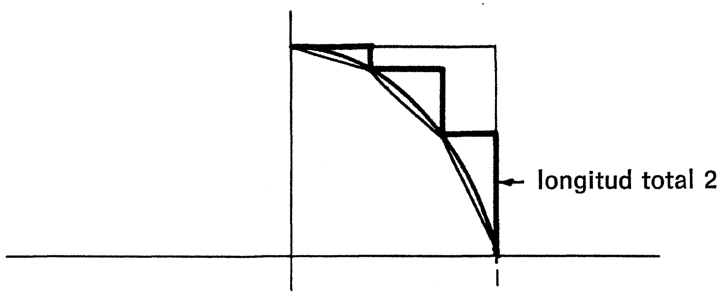
[En realidad, hace falta un razonamiento más detallado, ya que $\int_x^1 1/\sqrt{1 - t^2}\, dt$ no es una integral ordinaria, sino una integral impropia. Efectivamente, se deduce de modo inmediato del problema 33 que

$$\text{longitud de } f \text{ en } [x, 1-\epsilon] = \int_x^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Para obtener la expresión deseada para $\mathcal{L}(x)$ tenemos que hacer entonces uso del hecho que

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\text{longitud de } f \text{ en } [x, 1-\epsilon]) = \text{longitud de } f \text{ en } [x, 1].$$

Esto se demuestra de la manera siguiente. En primer lugar, la figura que sigue hace ver que la «longitud de f en $[x, 1]$» carece de sentido; de hecho, la longitud de f en $[0, 1]$ es $\leqslant 2$.



El mismo tipo de figura hace ver también que la longitud de f en $[1-\epsilon, 1]$ es $\leqslant 2\epsilon$. Se deduce entonces el límite deseado a partir de esta desigualdad y del hecho de ser

$$\text{longitud de } f \text{ en } [x, 1-\epsilon] + \text{longitud de } f \text{ en } [1-\epsilon, 1] = \text{longitud de } f \text{ en } [x, 1].$$

La demostración de este último hecho es muy parecida a la del enunciado correspondiente para integrales.]

(b) Esto se deduce de la parte (a) y del teorema fundamental del Cálculo.

(c) Según la definición dada es $\cos = \mathcal{L}^{-1}$, con lo que

$$\cos'(x) = (\mathcal{L}^{-1})'(x) = \frac{1}{\mathcal{L}'(\mathcal{L}^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}} = -\operatorname{sen} x.$$

La demostración para $\operatorname{sen}'(x)$ es la misma que la dada en el texto.

CAPÍTULO 16

1. (a) Sea $\Delta =$ área OAB. Al ser

$$xy = 2\Delta,$$
$$x^2 + y^2 = 1,$$

tenemos

$$\left(\frac{2\Delta}{y}\right)^2 + y^2 = 1,$$
$$4\Delta^2 + y^4 = y^2,$$
$$y^4 - y^2 + 4\Delta^2 = 0,$$
$$y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16\Delta^2}}{2}.$$

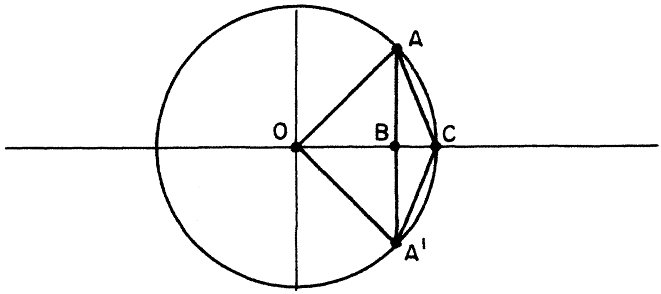
Tenemos

$$y^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 16\Delta^2}}{2},$$

siempre que $y^2 < 1/2$, o $y < \sqrt{2}/2$. Así pues,

$$\text{área } OAC = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 16\,(\text{área } OAB)^2}}{2}}$$

(b) Sea P_m la unión de m triángulos congruentes con el triángulo OAA' de la figura siguiente.



Cada uno de estos triángulos tiene por área A_m/m, por lo que el triángulo tiene por área $A_m/2m$. Pero P_{2m} es la unión de $2m$ triángulos congruentes con OAC. Así pues, por la parte (a),

$$A_{2m} = 2m \text{ área } OAC = m\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16\,(\text{área } OAB)^2}}{2}}$$

$$= m\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16\,A_m{}^2/4m^2}}{2}} = \frac{m}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-(2A_m/m)^2}}.$$

2. (a)

$$\frac{A_m}{A_{2m}} = \frac{2m \text{ área } (OAB)}{2m \text{ área } (OAC)} = OB = \alpha_m.$$

(b)

$$\frac{2}{A_{2^k}} = \frac{2}{A_8}\cdot\frac{A_8}{A_{16}}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{2^{k-1}}}{A_{2^k}} = \frac{A_4}{A_8}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{2^{k-1}}}{A_{2^k}} = \alpha_4\cdot\ldots\cdot\alpha_{2^{k-1}}$$

(c)

$$\alpha_4 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_8 = \cos\left(\frac{\pi/4}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\cos\pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \qquad \text{etcétera.}$$

CAPÍTULO 17

1. (ii) $$\frac{1}{1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))}\cdot\frac{1}{1+\log(1+e^{1+e^{1+x}})}\cdot\frac{1}{1+e^{1+e^{1+x}}}\cdot e^{1+e^{1+x}}\cdot e^{1+x}.$$

(iv) $\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)\cdot e^{-x^2}.$

(vi)

$$f(x)=\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log e^x}=\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{x},$$

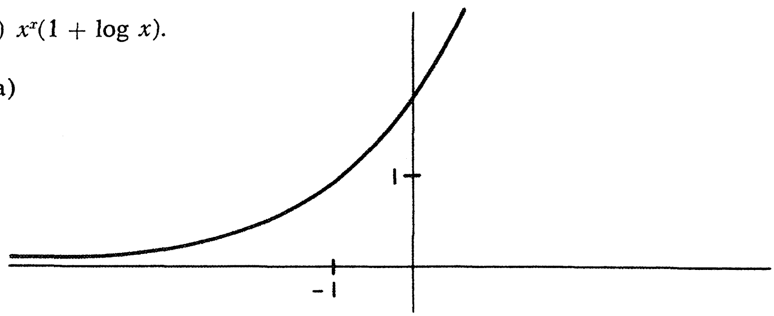
con lo que

$$f'(x)=\frac{x\cdot\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\log(\operatorname{sen} x)}{x^2}.$$

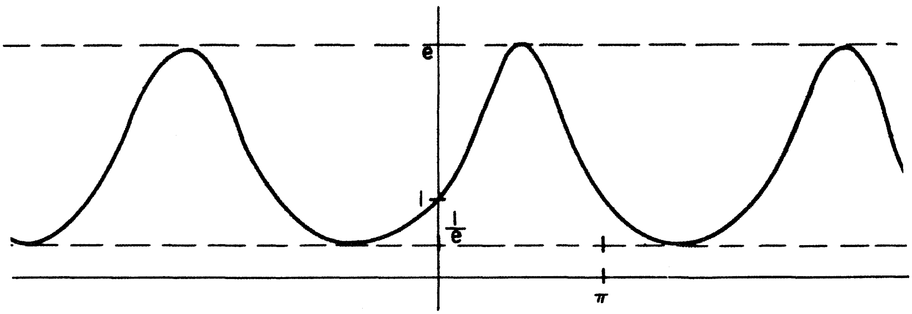
(viii) $4\log(3+e^4)\ e^{4x}+(\log 3)(\operatorname{arc\,sen} x)^{(\log 3)-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(x) $x^x(1+\log x).$

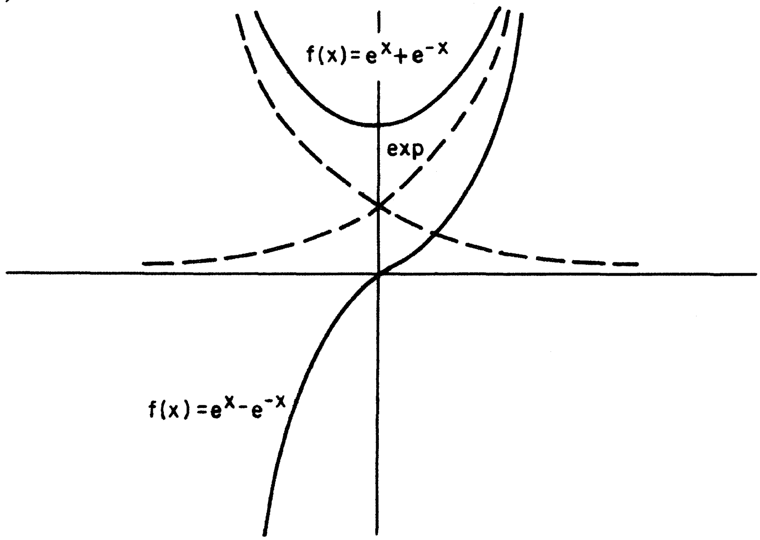
2. (a)



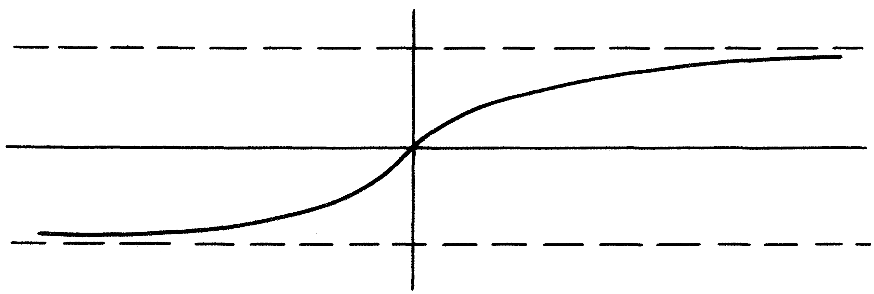
(b)



(c), (d)



(e)



3. (ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6} = 0.$$

(iv)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x} - 1 + x}{2x}$$

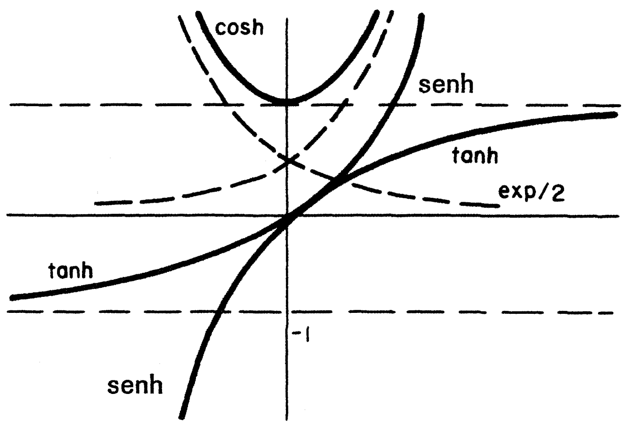
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2} + 1}{2} = 0.$$

(vi)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + x^2/2 - x^3/3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-1}{(1+x)^2} + 1 - 2x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{(1+x)^3} - 2}{6} = 0.$$

4.



5. (b) Puesto que, según la parte (a), es $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$, tenemos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2}.$$

(d)

$$\cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y}}{4} + \frac{e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x-y}}{4} + \frac{e^{y-x}}{4} + \frac{e^{x+y}}{4} + \frac{e^{-x-y}}{4} - \frac{e^{y-x}}{4} - \frac{e^{x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x + y).$$

(f) Puesto que

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

tenemos

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

6. (b) Se sigue del problema 5(a) que

$$\cosh^2(\arg \operatorname{senh} x) = 1 + \operatorname{senh}^2(\arg \operatorname{senh} x) = 1 + x^2,$$

con lo que

$$\cosh(\arg \operatorname{senh} x) = \sqrt{1 + x^2},$$

ya que $\cosh y \geqslant 0$ para todo y.

(d)

$$(\arg \cosh)'(x) = \frac{1}{\cosh'(\arg \cosh x)} = \frac{1}{\operatorname{senh}(\arg \cosh x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

8. (b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\log x)^n} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{y^n} = \infty.$$

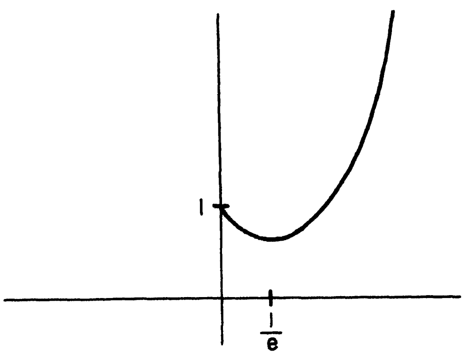
(d)

$$\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^n = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1)^n\left(\log \dfrac{1}{x}\right)^n}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{(-1)^n (\log y)^n}{y} = 0.$$

9. [f es convexa, ya que

$$f'(x) = x^x(1 + \log x),$$
$$f''(x) = x^x(1 + \log x)^2 + \frac{x^x}{x} \geqslant 0.]$$



10. (a) Si $x > 0$ y

$$0 = f'(x) = \frac{x^n e^x - nx^{n-1} e^x}{x^{2n}} = \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}},$$

entonces $x = n$, con lo que el mínimo está en n, ya que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = = \infty = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Así para $x > n$ tenemos $f(x) > f(n) = e^n/n^n$.

(b) Si $x > n + 1$, entonces

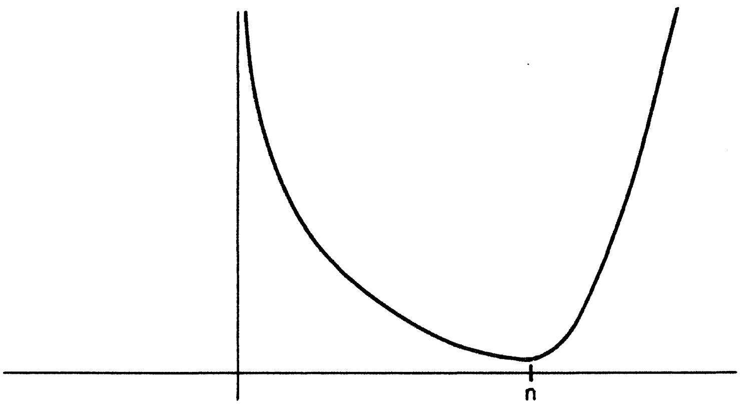
$$f'(x) > \frac{e^x}{x^{n+1}} > \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

según la parte (a) aplicada al caso $n + 1$. Se sigue inmediatamente que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (utilizando simplemente el hecho de ser

$f'(x) > \epsilon > 0$ para algún ϵ y para todos los x suficientemente grandes).

11. [f es convexa, ya que

$$f'(x) = e^x x^{-n} - ne^x x^{n-1},$$
$$f''(x) = e^x x^{-n} - ne^x x^{-n-1} - ne^x x^{-n-1} + n(n+1)\, e^x x^{-n-2}$$
$$= \frac{e^x}{x^{n+2}} [x^2 - 2nx + n^2 + n] \geqslant 0 \qquad \text{para todo } x.]$$



12. (e) Si $f(x) = e^{bx}$, entonces $f'(0) = b$, con lo que

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{by} - 1}{y} = b.$$

Así pues,

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{b/x} - 1) = b.$$

Por lo tanto

$$\log b = \lim_{x\to\infty} x\,(e^{(\log b)/x} - 1)$$
$$= \lim_{x\to\infty} x\,(b^{1/x} - 1).$$

13. Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$ según el problema 12(c) y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0^+} x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}[x\log(x+1) - x\log x]\right)$$

$$= \exp 0 = 1, \qquad \text{utilizando el problema 8(d).}$$

Además,

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x g(x).$$

Para analizar f', observemos que

$$g'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

Por lo tanto, g es decreciente. Puesto que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, debemos tener $g(x) > 0$ para todos los $x > 0$. Con esto f es creciente. [Además,

$$f''(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[-\frac{1}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2 - \frac{2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}\right]$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) h(x).$$

Tenemos ahora

$$h'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x-1}{x(x+1)^2}.$$

Así pues, h es decreciente en $(0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$. Pero

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - 2}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\log(x+1) - (x+1)\log x - 2}{x+1}$$

$$= -\infty$$

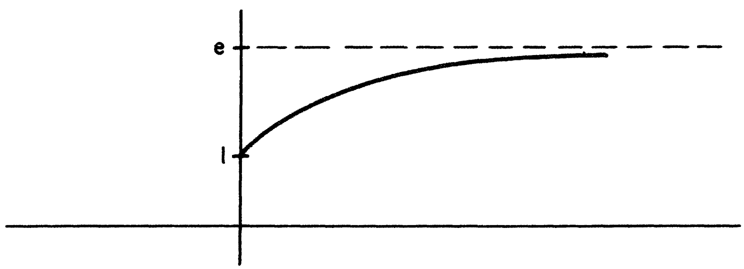
y

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1} = 0$$

y

$$h(1) = \log 2 - 2 < 0,$$

así que es $h(x) < 0$ para todo x. En consecuencia $f''(x) < 0$ para todo x, con lo que f es cóncava].



19. Obsérvese que f es continua según el teorema 13-8. Tenemos, por lo tanto $f'(x) = f(x)$, con lo que existe un número c, tal que $f(x) = ce^x$. Pero $f(0) = 0$, con lo que es $c = 0$.

20. Tenemos $f''(t) = f'(t)$, con lo que $f'(t) = ce^t$ para algún c y $f(t) = a + ce^t$ para algún a. Así pues,

$$ce^t = (a + ce^t) + \int_0^1 (a + ce^t)\,dt$$
$$= a + ce^t + a + ce - c,$$

con lo que $a = c(1 - e)/2$.

21. (a) Para $n = 0$ la desigualdad se convierte en $1 \leqslant e^x$ para $x \geqslant 0$, la cual es ciertamente válida, ya que es $e^0 = 1$ y la función exponencial es creciente. Supóngase que la desigualdad es válida para n. Sea

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Entonces

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leqslant e^x,$$

mientras que $f(0) = e^0$. Se sigue que $f(x) \leqslant e^x$ para $x \geqslant 0$.

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1 + x + x^2/2! + \dots + x^{n+1}/(n+1)!}{x^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!\,x^{n-2}} + \dots + \frac{x}{(n+1)!}$$
$$= \infty.$$

22. Utilizando la forma del teorema de l'Hôpital demostrada en la solución al problema 11-38, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

23. Si $A(t) = P(t) - 10^7$, entonces

$$A'(t) = P'(t) = 10^7 - P(t) = -A(t).$$

Existe así (por el problema 16) un número k tal que

$$A(t) = ke^{-t}.$$

Puesto que $A(0) = P(0) - 10^7 = -10^7$, obtenemos $k = -10^7$, con lo que

$$P(t) - 10^7 = -10^7 e^{-t},$$

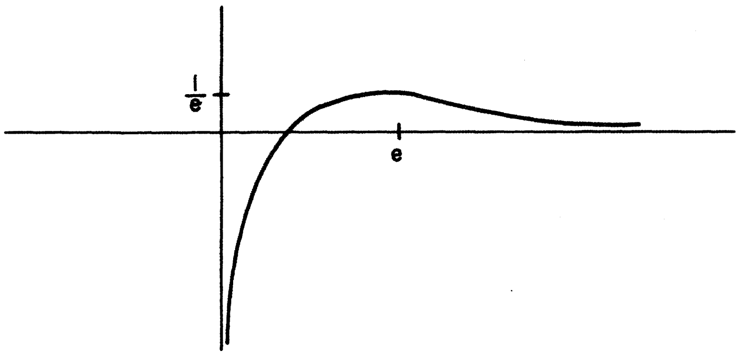
de donde

$$10^7 t = \text{Nep } \log[10^7 - P(t)]$$
$$= \text{Nep } \log 10^7 e^{-t};$$

poniendo $x = 10^7 e^{-t}$, con lo que $t = \log(10^7/x)$, obtenemos

$$\text{Nep } \log x = 10^7 \log \frac{10^7}{x}.$$

24. (a) Tenemos $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ según el problema 8.



(b) Puesto que el máximo de f está en e, tenemos

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi},$$

de donde

$$e \log \pi > \pi \log e,$$

con lo que

$$\pi^e > e^\pi.$$

(c) La ecuación $x^y = y^x$ equivale a $f(x) = f(y)$. Los asertos de la parte (c) equivalen a decir que los valores de $f(x)$ para $0 < x < 1$ o para $x = e$ son alcanzados solamente una vez, mientras que los valores $f(x)$ para $1 < x < e$ son alcanzados para un $x' > e$ y viceversa.

(d) La parte (c) hace ver que los únicos posibles números naturales $x < y$ con $x^y = y^x$ suponen que sea $1 < x < e$, con lo que $x = 2$.

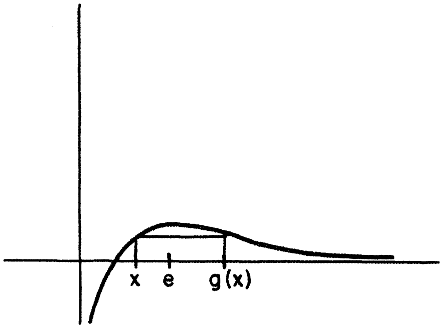
(e), (f) Si se definen f_1 y f_2 como en la parte (f), entonces $g = f_2^{-1} \circ f_1$. La curva de la parte (e) es la gráfica de g en $(1, e)$; la recta es la gráfica de la función identidad. Se «cortan» en (e, e) (para mayor precisión, en $\lim_{x\to e} g(x) = e$).

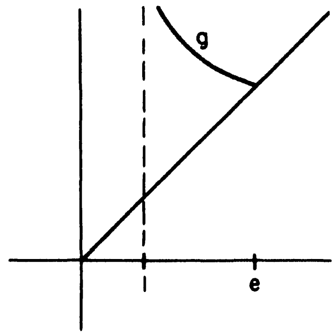
Además, g es derivable, ya que f_1 y f_2 son derivables y $f_2'(x) \neq 0$ para todo x del dominio de f_2. Tenemos, en efecto,

$$g'(x) = (f_2^{-1} \circ f_1)'(x) = (f_2^{-1})'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

$$= \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(f_1(x)))} \cdot f_1'(x)$$

$$= \frac{[g(x)]^2}{1 - \log g(x)} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}.$$





25. (a) La exponencial es convexa, ya que $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ para todo x. Análogamente, el logaritmo es una función cóncava, ya que $\log''(x) = -1/x^2 < 0$ para todo $x > 0$.

(b) Suponemos, naturalmente, que $z_i > 0$. El problema 8 del apéndice al Capítulo 11, aplicado a la función convexa exponencial, hace ver que

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \log z_i\right) < \sum_{i=1}^{n} \exp(\log z_i)$$

o

$$z_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n} \leqslant p_1 z_1 + \ldots + p_n z_n.$$

(c) Tómese $p_i = 1/n$.

26. De $f' = f$ deducimos que $f(x) = ce^x$ para algún c. De

$$f(x + 0) = f(x) f(0)$$

deducimos que o bien es $f(x) = 0$ para todo x, o de lo contrario que $f(0) = 1$, en cuyo caso $c = 1$.

27. Supóngase que $f \neq 0$. De $f(x + 0) = f(x)f(0)$ se sigue que $f(0) = 1$. Entonces de

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$$

se sigue que $f(x) \neq 0$ para todo x. Además $f(x) > 0$ para todo x, ya que

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2.$$

Si ahora n es un número natural, entonces

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}}) = f(1)^n;$$

además,

$$1 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) \cdot f(-n),$$

con lo que

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(1)^n} = f(1)^{-n}.$$

De modo análogo,

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ veces}}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

con lo que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)} = f(1)^{1/n}$. Finalmente

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ veces}}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = f(1)^{m/n}.$$

Puesto que f coincide con $g(x) = [f(1)]^x$ para x racionales, se deduce del poblema 8-6 que $f = g$.

28. Si $g(x) = f(e^x)$, entonces

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y).$$

Del problema 8-7 se deduce que $g(x) = cx$ para algún c. Si $c = 0$, entonces $f = 0$. Si $c \neq 0$, entonces

$$f(e) = f(e^1) = g(1) = c,$$

con lo que

$$f(e^x) = f(e)x$$

o

$$f(x) = f(e) \log x \qquad \text{para } x > 0.$$

29. Las fórmulas para $f'(x)$ y $f''(x)$ (para $x \neq 0$) dadas en el texto sugieren

la siguiente conjetura, que se demuestra fácilmente por inducción sobre k:

$$f^{(k)}(x) = e^{-1/x^2} \sum_{i=1}^{3k} \frac{a_i}{x^i} \qquad \text{para ciertos números } a_1, \ldots, a_{3k}.$$

Queda claro entonces, utilizando el mismo razonamiento del texto, que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

30. La siguiente conjetura resulta fácil de comprobar.

$$f^{(k)}(x) = e^{-1/x^2} \left[\sum_{i=1}^{3k} \frac{a_i}{x^i} \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{3k} \frac{b_i}{x^i} \cos \frac{1}{x} \right] \qquad \text{para ciertos números } a_1, \ldots, a_{3k}, b_1, \ldots, b_{3k}.$$

Queda claro entonces que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k, lo mismo que en el ejemplo anterior (obsérvese que $|\operatorname{sen} 1/x| \leqslant 1$ y que $|\cos 1/x| \leqslant 1$ para todo $x \neq 0$).

31. (a) Si $y(x) = e^{\alpha x}$, entonces

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) \\ &= a_n \alpha^n e^{\alpha x} + a_{n-1} \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_1 \alpha e^{\alpha x} + a_0 e^{\alpha x} \\ &= e^{\alpha x}(a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0) = 0. \end{aligned}$$

(b) Si $y(x) = xe^{\alpha x}$, entonces

$$y^{(\ell)}(x) = \alpha^\ell x e^{\alpha x} + \ell \alpha^{\ell-1} e^{\alpha x}.$$

(Esta fórmula puede verificarse por inducción, o deducirse del problema 10-15.) Así pues,

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) \\ &= xe^{\alpha x}[a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0] \\ &\quad + e^{\alpha x}[n a_n \alpha^{n-1} + \ldots + a_1] = 0 \end{aligned}$$

(el segundo término entre corchetes es 0 por ser α raíz doble de (*)).

(c) Si $y(x) = x^k e^{\alpha x}$, entonces por el problema 10-15,

$$y^{(\ell)}(x) = \left[\sum_{s=0}^{k} \binom{\ell}{s} \frac{k!}{(k-s)!} x^{k-s} \alpha^{\ell-s} \right] e^{\alpha x}.$$

Así pues,

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell y^{(\ell)}(x) = \sum_{s=0}^{k} \left[\sum_{\ell=0}^{n} \binom{\ell}{s} a_\ell \alpha^{\ell-s} \right] \frac{k!}{(k-s)!} x^{k-s} e^{\alpha x} = 0$$

(los términos entre corchetes son 0 por ser α raíz de orden $s+1$ de (*), para cada $s \leqslant k$).

(d) Si $y_1, \dots, y_n$ satisfacen (**), entonces

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(c_1y_1 + \dots + c_ny_n)^{(\ell)} = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell y_j^{(\ell)}\right) = 0 .$$

32. (a) A partir de

$$0 = f'(f''-f) = f'f''-ff' = \frac{1}{2}[(f')^2 - f^2]'$$

se sigue que $(f')^2 - f^2$ es constante. La constante tiene que ser 0, ya que $f(0) = f'(0) = 0$.

(b) Puesto que $f(x) \neq 0$ cuando x está en (a, b), se sigue de la parte (a), que es, o bien $f'(x) = f(x)$ para todo x de (a, b), o bien $f'(x) = -f(x)$ para todo x de (a, b). Así pues, o bien $f(x) = ce^x$, o si no $f(x) = ce^{-x}$ para todo x de (a, b).

(c) Sea a el número más grande de $[0, x_0]$ para el que es $f(a) = 0$. Entonces $f(x) \neq 0$ si x está en (a, x_0). Pero entonces $f(x) = ce^x$ o $f(x) = ce^{-x}$ para todo x de (a, x_0), siendo $c \neq 0$. Esto está en contradicción con $f(a) = 0$, siendo f continua, ya que $f(a) = 0 \neq \lim\limits_{x\to a} ce^x$ o $\lim\limits_{x\to a} ce^{-x}$.

33. (a) Sea

$$a = \frac{f(0) + f'(0)}{2}$$

$$b = \frac{f(0) - f'(0)}{2}.$$

Si $g(x) = ae^x + be^{-x} - f(x)$, entonces $g'' - g = 0$, con lo que $f(x) = ae^x + be^{-x}$.

(b) Obsérvese que

$$\begin{aligned} ae^x + be^{-x} &= (a-b)\frac{e^x - e^{-x}}{2} + (a+b)\frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= (a-b)\operatorname{senh} x + (a+b)\cosh x. \end{aligned}$$

(Comparando con la parte (a) vemos que

$$f(x) = f'(0)\operatorname{senh} x + f(0)\cosh x,$$

en fiel analogía con las funciones trigonométricas.)

34. (a) Tenemos $f^{(n-1)}(x) = ce^x$, con lo que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + ce^x.$$

(b) Tenemos

$$f^{(n-2)}(x) = ce^x + de^{-x}$$

según el problema 33, con lo que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-3}x^{n-3} + ce^x + de^{-x}.$$

35. (a) Al ser

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x_0 + x)\, f(x_0 - x) - f(x_0 + x)\, f'(x_0 - x) \\ &= f(x_0 + x)\, f(x_0 - x) - f(x_0 + x)\, f(x_0 - x) = 0, \end{aligned}$$

la función g es constante. Además, $g(0) = f(x_0)^2 \neq 0$. Así pues,

$$f(x_0 + x)\, f(x_0 - x) \neq 0 \qquad \text{para todo } x,$$

lo cual implica que $f(x) \neq 0$ para todo x.

(b) Sea $f = f_1/f_1(0)$, donde $f_1 \neq 0$ y $f_1' = f_1$.

(c) Al ser

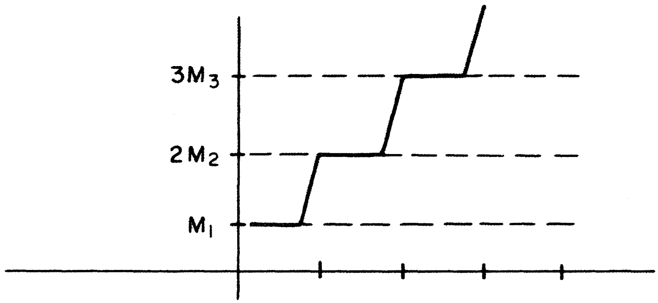
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f(x)\, f'(x + y) - f(x + y)\, f'(x)}{f(x)^2} \\ &= \frac{f(x)\, f(x + y) - f(x + y)\, f(x)}{f(x)^2} = 0, \end{aligned}$$

la función g es constante, y claramente $g(0) = f(y)$, con lo que $f(x + y)/f(x) = f(y)$ para todo x.

(d) f es creciente, ya que $f(x) = f(x/2 + x/2) = [f(x/2)]^2 > 0$. Además,

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

36. Sea M_n el máximo de $|g_1| + \dots + |g_n|$ en $[0, n]$ y elíjase f tal que $f(x) \geqslant nM_n$ en $[0, n]$.



37. Si existieran números naturales a y b con $\log_{10} 2 = a/b$, entonces

$$2 = 10^{a/b},$$

con lo que $2^b = 10^a$. Esto está en contradicción con el hecho, mencionado en el problema 1-16, de que la descomposición de un entero en producto de factores primos es única (pues el producto 2^b no contiene al factor primo 5, mientras que 10^a sí lo contiene).

CAPÍTULO 18

2. (ii) $-e^{-x^2}/2$. (Póngase $u = -x^2$.)

(iv) $-1/(e^x + 1)$. (Póngase $u = e^x$.)

(vi) $(\text{arc sen } x^2)/2$. (Póngase $u = x^2$.)

(viii) $-(1 - x^2)^{3/2}/3$. (Póngase $u = 1 - x^2$.)

(x) $[\log(\log x)]^2/2$. (Póngase $u = \log(\log x)$.)

3. (ii)

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \int x^2(xe^{x^2})\, dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int xe^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2}.$$

(iv)

$$\int x^2 \text{ sen } x\, dx = x^2(-\cos x) + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \text{ sen } x - \int \text{sen } x\, dx\right]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x + 2 \cos x.$$

(vi)

$$\int \log(\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx = (\log x) \cdot \log(\log x) - \int \log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= (\log x) \cdot \log(\log x) - \log x.$$

(viii)

$$\int 1 \cdot \cos(\log x)\, dx = x \cos(\log x) + \int x \text{ sen } (\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\cos(\log x) + \int 1\cdot \operatorname{sen}(\log x)\,dx$$

$$= x\cos(\log x) + \left[x \operatorname{sen}(\log x) - \int x\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right]$$

así que

$$\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x\cos(\log x) + x\operatorname{sen}(\log x)}{2}.$$

(x)

$$\int x(\log x)^2\,dx = \frac{x^2(\log x)^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2(\log x)^2}{2} - \int x\log x\,dx$$

$$= \frac{x^2(\log x)^2}{2} - \left(\frac{x^2\log x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= \frac{x^2(\log x)^2}{2} - \frac{x^2\log x}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

4. (ii) Pongamos $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec^2 u\,du}{\sqrt{1+\tan^2 u}} = \int \sec u\,du = \log(\sec u + \tan u)$$

$$= \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

(iv) Sea $x = \sec u$, $dx = \sec u\tan u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec u\tan u\,du}{\sec u\sqrt{\sec^2 u - 1}} = \int 1\,du = u = \operatorname{arc\,sec} x.$$

(Esto puede expresarse también, utilizando funciones más conocidas, en la forma $\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{x^2-1})$.)

(vi) Sea $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec^2 u\,du}{\tan u\sqrt{1+\tan^2 u}} = \int \frac{\sec u\,du}{\tan u\,du} = \int \csc u\,du$$

$$= -\log(\csc u + \cot u) = -\log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

$$= \log\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right).$$

(viii) Pongamos $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\cos u\, du = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\, du$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} u \cos u}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

(x) Pongamos $x = \sec u$, $dx = \sec u \tan u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \sqrt{\sec^2 u - 1}\sec u \tan u\, du = \int \sec u \tan^2 u\, du$$

$$= \int (\sec u)(\sec^2 u - 1)\, du = \int \sec^3 u\, du - \int \sec u\, du$$

$$= \frac{1}{2}[\tan u \sec u + \log(\sec u + \tan u)] \qquad \text{por el problema 3(vii)}$$

$$- \log(\sec u + \tan u)$$

$$= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

5. (ii) Pongamos $u = e^x$, $x = \log u$, $dx = 1/u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{du}{u(1+u)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= \log u - \log(1+u)$$

$$= x - \log(1+e^x).$$

(iv) Pongamos $u = \sqrt{1+e^x}$, $x = \log(u^2-1)$, $dx = 2u/(u^2-1)\, du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{2u\, du}{u(u^2-1)} = \int \left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\right) du$$

$$= \log(u + 1) + \log(u - 1)$$

$$= \log(1 + \sqrt{1 + e^x}) + \log(\sqrt{1 + e^x} - 1).$$

(vi) Pongamos $u = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$, $x = (u^2 - 1)^2$, $dx = 4u(u^2 - 1)\ \ du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{4u(u^2 - 1)\ du}{u} = \frac{4}{3} u^3 - 4u$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{x} + 1)^{3/2} - 4(\sqrt{x} + 1)^{1/2}.$$

(viii) Pongamos $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u\ du$. La integral se convierte en

$$\int 2ue^u\ du = 2ue^u - 2 \int e^u\ du$$

$$= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}.$$

(x) Pongamos $u = 1/x$, $x = 1/u$, $dx = -1/u^2\ du$. La integral se convierte en

$$\int \sqrt{\frac{1/u - 1}{1/u + 1}} \cdot u^2 \cdot -\frac{1}{u^2}\ du = -\int \frac{\sqrt{1 - u}}{\sqrt{1 + u}}\ du = -\int \frac{1 - u}{\sqrt{1 - u^2}}\ du.$$

Pongamos ahora $u = \operatorname{sen} t$, $du = \cos t\ dt$. La integral se convierte en

$$\int \frac{1 - \operatorname{sen} t}{\cos t} \cos t\ dt = \int (1 - \operatorname{sen} t)\ dt$$

$$= t + \cos t$$

$$= \operatorname{arc\,sen} u + \sqrt{1 - u^2}$$

$$= \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

6. En esta respuesta, I expresa la integral de origen

(ii)

$$I = \int \frac{2}{(x - 1)^2}\ dx + \int \frac{3}{(x - 1)^3}\ dx = -\frac{2}{(x - 1)} - \frac{3}{2(x - 1)^2}.$$

(iv)

$$I = \int \left(\frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} \right) dx = \log(x + 3) + \log(x - 1) - \frac{1}{x - 1}.$$

(vi)

$$I = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{\log(x^2+1)}{2} + 2\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \right]$$

$$+ \frac{\log(x^2+1)}{2} + \frac{x}{x^2+1} + \text{arc tan } x.$$

(viii)

$$I = \int \frac{dx}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2-2x^2}$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \int \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} \right) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{(2x+\sqrt{2})\, dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{(2x-\sqrt{2})\, dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \log(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \log(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(-\sqrt{2}x+1)^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \log(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \log(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{4} \text{arc tan}(\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \text{arc tan}(-\sqrt{2}x+1).$$

(x)

$$I = \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\, dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\, dx$$

$$= \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right)^3}$$

$$= \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3 \int \frac{dx}{\left(\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1\right)^3}$$

$$\left(\text{tomemos } u = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}},\ dx = \sqrt{3/4}\ du\right)$$

$$= \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} - 32\sqrt{3/4} \int \frac{du}{(u^2+1)^3}$$

$$= \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} - 32\sqrt{3/4}\left[\frac{1}{4}\,\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} - \frac{8\sqrt{3/4}\,u}{(u^2+1)^2} - 24\sqrt{3/4}\left[\frac{1}{2}\,\frac{u}{(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\right]$$

$$= \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} - \frac{8x+4}{(x^2+x+1)^2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{12x+6}{x^2+x+1}\sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{12}{x^2+x+1}.$$

7. (i) $(\arctan x)^2/2$.

(ii)

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\arctan x\,dx = \frac{-1}{4(1+x^2)^2}\arctan x - \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{6(1+x^2)^3}.$$

(iii)

$$\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx = x\log\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\log\sqrt{1+x^2} - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\log\sqrt{1+x^2} - \int\left(2 + \frac{-2}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x\log\sqrt{1+x^2} - 2x + 2\arctan x.$$

(iv)

$$\int x \log \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} \log \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log \sqrt{1+x^2} - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log \sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{\log(1+x^2)}{2}.$$

(v) Pongamos

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad yx^2 + y = x^2 - 1,$$

$$y + 1 = x^2(1-y)$$

$$x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}},$$

$$dx = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\, \frac{1}{(1-y)^2}\, dy.$$

La integral se convierte en

$$\int y \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)^2}} \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}} \frac{1}{(1-y)^2}\, dy$$

$$= \int \frac{y}{(1-y)^2} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+2y^2}{(1-y)^2}}} \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}}\, dy$$

$$= \int \frac{y}{(1-y)} \frac{1}{\sqrt{2+2y^2}} \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{y\, dy}{\sqrt{1-y^2}\, \sqrt{1+y^2}}$$ (después de multiplicar numerador y denominador de la expresión precedente por $\sqrt{1-y}$).

Pongamos ahora $u = y^2$, $du = 2y\, dy$. La integral se convierte en

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u}\, \sqrt{1+u}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen} u$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2.$$

(vi) Pongamos $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u\ du$. La integral se convierte en

$$\int 2u \operatorname{arc\,sen} u\ du = u^2 \operatorname{arc\,sen} u - \int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\ du.$$

Pongamos ahora $u = \operatorname{sen} t$, $du = \cos t\ dt$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\ dt = \int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{2}.$$

Con todo esto, la integral de origen es

$$u^2 \operatorname{arc\,sen} u - \frac{\operatorname{arc\,sen} u}{2} - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{2}$$

$$= x \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x} - \frac{\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{2}.$$

(vii) Al ser

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\ dx = \tan x - \sec x \qquad \text{(problema 1(viii))}$$

tenemos

$$\int x \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\ dx = x(\tan x - \sec x) - \int (\tan x - \sec x)\ dx$$

$$= x(\tan x - \sec x) + \log(\cos x) + \log(\sec x + \tan x).$$

(viii)

$$\int x \cos x\ e^{\operatorname{sen} x}\ dx - \int \sec x \tan x\ e^{\operatorname{sen} x}\ dx$$

$$= (xe^{\operatorname{sen} x} - \int e^{\operatorname{sen} x}\, dx) - (\sec x e^{\operatorname{sen} x} - \int \sec x \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx)$$

$$= xe^{\operatorname{sen} x} - \sec x\, e^{\operatorname{sen} x}.$$

(ix) Pongamos

$$u = \sqrt{\tan x}, \qquad u^2 = \tan x$$

$$x = \operatorname{arc\,tan} u^2$$

$$dx = \frac{2u}{1+u^4}\, du.$$

La integral se convierte en (compárese con el problema 6(viii))

$$\int \frac{2u^2\, du}{1+u^4} = \int \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} \right) du$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4} \log(u^2 + \sqrt{2}u + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \log(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}u + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tan}(-\sqrt{2}u + 1)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4} \log(\tan x + \sqrt{2 \tan x} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \log(\tan x - \sqrt{2 \tan x} + 1)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2 \tan x} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tan}(-\sqrt{2 \tan x} + 1).$$

(x)

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \int \frac{dx}{(x^2+1)[(x^4+2x^2+1)-3x^2]}$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)[(x^2+1)^2-3x^2]} = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right) dx$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12} \int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\, dx + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{3}x+1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{12}\int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,dx+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{3}x+1}$$

$$=\frac{\arctan x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)-\frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1)$$

$$+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3}).$$

8. (iv) Pongamos $x=\cosh u$, $dx=\operatorname{senh} u\,du$. La integral del problema 4 (iv) se convierte en

$$\int \frac{\operatorname{senh} u\,du}{\cosh u \operatorname{senh} u}=\int \frac{1}{\cosh u}\,du$$

$$=\int \frac{2}{e^u+e^{-u}}\,du=\int \frac{2e^u}{1+e^{2u}}\,du$$

$$=2\arctan e^u$$

$$=2\arctan(x+\sqrt{x^2-1}),$$

ya que $u=\operatorname{arg\,cosh} x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$, según se obtuvo en el problema 17-7.

Comparando con el problema 4(iv) no podemos concluir que

$$2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})=\arctan(\sqrt{x^2-1}),$$

sino solamente que estàs dos expresiones difieren en una constante. De hecho, podemos concluir solamente que existen dos constantes c_1 y c_2 con

$$2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})=\arctan(\sqrt{x^2-1})+c_1 \qquad \text{para } x\geqslant 1,$$
$$2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})=\arctan(\sqrt{x^2-1})+c_2 \qquad \text{para } x\leqslant -1.$$

Poniendo $x=1$ y $x=-1$ es fácil ver que $c_1=\pi/2$ *y* $c_2=-\pi/2$.

(vi) Pongamos $x=\operatorname{senh} u$, $dx=\cosh u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\cosh u\,du}{\operatorname{senh} u\cosh u}=\int\frac{du}{\operatorname{senh} u}$$

$$=\int \frac{2}{e^u-e^{-u}}\,du=\int \frac{2e^u\,du}{e^{2u}-1}$$

$$=\int\left(\frac{-e^u}{e^u+1}+\frac{e^u}{e^u-1}\right)du$$

$$= -\log(e^u + 1) + \log(e^u - 1)$$

$$= \log\left(\frac{e^u - 1}{e^u + 1}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + x + 1}\right).$$

(ix) Pongamos $x = \operatorname{senh} u$, $dx = \cosh u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \cosh^2 u\, du = \int\left(\frac{e^{2u}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2u}}{4}\right)du$$

$$= \frac{e^{2u}}{8} + \frac{u}{2} - \frac{e^{-2u}}{8} = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{8} + \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} - \frac{1}{8(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

(x) Pongamos $x = \cosh u$, $dx = \operatorname{senh} u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \int\left(\frac{e^{2u}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2u}}{4}\right)du$$

$$= \frac{e^{2u}}{8} - \frac{u}{2} - \frac{e^{-2u}}{8} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{8} - \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{2} - \frac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2}.$$

9. (i)

$$\int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2\,dt}{1+2t+t^2} = \int \frac{2\,dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+t} = \frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}.$$

Comparando con la fórmula

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int(\sec^2 x - \sec x \tan x)\,dx = \tan x - \sec x,$$

podemos concluir que

$$\frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}} = \tan x - \sec x - 1.$$

(Esto puede comprobarse muy fácilmente expresándolo todo en función de t:

$$\frac{-2}{1+t} = \frac{2t}{1-t^2} - \frac{1+t^2}{1-t^2} - 1.)$$

(ii) Pongamos $t = \tan x$, $dx = 1/(1+t^2)\,dt$. Entonces puede expresarse $\operatorname{sen}^2 x$ en función de t en la forma

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\sec^2 x}$$
$$= 1 - \frac{1}{\tan^2 x + 1}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

De este modo la integral se convierte en

$$\int \frac{1}{1 + \dfrac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{2t^2+1}\, dt = \frac{\arctan \sqrt{2}\, t}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\arctan(\sqrt{2}\tan x)}{\sqrt{2}}.$$

(iii)

$$\int \frac{1}{\dfrac{2at}{1+t^2} + \dfrac{b - bt^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{2at + b - bt^2}\, dt.$$

Si $b > 0$, esto puede ponerse como sigue:

$$\int \frac{-2\, dt}{bt^2 - 2at - b} = \int \frac{-2\, dt}{\left(\sqrt{b}\,t - \dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)^2 - \dfrac{(a^2+b^2)}{b}}$$

$$= \int \left[\frac{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\left(\sqrt{b}\,t - \dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b}}\right)} - \frac{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\left(\sqrt{b}\,t - \dfrac{a}{\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b}}\right)} \right] dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\log\left(\sqrt{b}\,t - \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b}}\right) - \log\left(\sqrt{b}\,t - \frac{a}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b}}\right)\right].$$

Si $b < 0$, la integral puede expresarse en la forma

$$\int \frac{2\,dt}{-bt^2+2at+b} = \int \frac{2\,dt}{\left(\sqrt{-b}t + \dfrac{a}{\sqrt{-b}}\right)^2 + \dfrac{a^2+b^2}{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left[\log\left(\sqrt{-b}t + \frac{a}{\sqrt{-b}} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{-b}}\right) - \log\left(\sqrt{-b}t + \frac{a}{\sqrt{-b}} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{-b}}\right)\right].$$

Se puede también poner

$$\int \frac{dx}{a \text{ sen } x + b \cos x} = \int \frac{dx}{A \text{ sen}(x+B)}$$

$$= -\frac{1}{A}\log(\csc(x+B) + \cot(x+B)),$$

donde

$$A = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos B = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(iv)

$$\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 8\int\left(\frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^3}\right)dt$$

$$= -8\left[\frac{1}{4}\,\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt\right] + 8\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= \frac{-2t}{(1+t^2)^2} + 2\left[\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right]$$

$$= \frac{-2t}{(1+t^2)^2} + \frac{t}{1+t^2} + \arctan t$$

$$= \frac{-2\tan x/2}{\sec^4 x/2} - \frac{\tan x/2}{\sec^2 x/2} + \frac{x}{2}$$

$$= -2 \text{ sen } x/2 \cos^3 x/2 - \text{sen } x/2 \cos x/2 + x/2$$

$$= -2 \text{ sen } x/2 \cos x/2(1 - \text{sen}^2 x/2) - \text{sen } x/2 \cos x/2 + x/2$$

$$= -\text{sen } x\left[1 - \left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)\right] - \frac{\text{sen } x}{2} + \frac{x}{2}$$

$$= -\text{sen } x\left[\frac{1 + \cos x}{2} - \frac{1}{2}\right] + \frac{x}{2}$$

$$= \frac{-\text{sen } 2x}{4} + \frac{x}{2}\,.$$

(v)

$$\int \frac{1}{3 + \dfrac{10t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2}\, dt = \int \frac{2\, dt}{3t^2 + 10t + 3}$$

$$= \int \left(\frac{3/4}{3t + 1} + \frac{-1/4}{t + 3}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \log(3t + 1) - \frac{1}{4} \log(t + 3)$$

$$= \frac{1}{4} \log\left(3 \tan\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{4} \log\left(\tan\frac{x}{2} + 3\right).$$

10. (a) La fórmula dada demuestra que

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1 + \text{sen } x}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1 - \text{sen } x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(1 + \text{sen } x) - \frac{1}{2} \log(1 - \text{sen } x)$$

$$= \log \sqrt{1 + \text{sen } x} - \log \sqrt{1 - \text{sen } x}$$

$$= \log \sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$$

$$= \log \sqrt{\frac{(1 + \text{sen } x)^2}{1 - \text{sen}^2 x}}$$

$$= \log \left(\frac{1 + \text{sen } x}{\cos x}\right)$$

$$= \log(\sec x + \tan x).$$

(b) Con la sustitución $t = \tan x/2$, la integral $\int \sec x \, dx$ se convierte en

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt \\
&= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\
&= \log(1+t) - \log(1-t) \\
&= \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sec x + \tan x &= \frac{1}{\cos 2(x/2)} + \tan 2(x/2) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2} + \frac{2 \tan x/2}{1 - \tan^2 x/2} \\
&= \frac{1}{2\cos^2 x/2 - 1} + \frac{2 \tan x/2}{1 - \tan^2 x/2} \\
&= \frac{1}{\dfrac{2}{1+\tan^2 x/2} - 1} + \frac{2 \tan x/2}{1 - \tan^2 x/2} \\
&= \frac{1 + \tan^2 x/2 + 2 \tan x/2}{1 - \tan^2 x/2} \\
&= \frac{1 + 2t + t^2}{1 - t^2} = \frac{(1+t)^2}{1-t^2} = \frac{1+t}{1-t}.
\end{aligned}$$

12. (b) Si $F = \int f(x)dx$, entonces

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x) \, dx = \int 1 \cdot f^{-1}(x) \, dx &= xf^{-1}(x) - \int x(f^{-1})'(x) \, dx \\
&= xf^{-1}(x) - \int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))} \, dx.
\end{aligned}$$

La sustitución $u = f^{-1}(x)$, $x = f(u)$, $dx = f'(u) \; du$ cambia la integral en

$$\int \frac{f(u)}{f'(u)} \cdot f'(u)\, du = F(u) = F(f^{-1}(x)),$$

con lo que

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)).$$

14.

$$\begin{aligned}\int \log(\log x)\, dx &= \int 1 \cdot \log(\log x)\, dx\\ &= x \log(\log x) - \int x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}\, dx\\ &= x \log(\log x) - \int \frac{1}{\log x}\, dx.\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x^2}\, dx &= \int x(xe^{-x^2})\, dx\\ &= \frac{-e^{-x^2}}{2} x + \frac{1}{2} \int e^{-x^2}\, dx.\end{aligned}$$

16. (Utilícese la sustitución $u = e^x$.) La función $g(x) = 1/(x^5 + x + 1)$ tiene una primitiva elemental G, ya que es una función racional. Entonces $G \circ \exp$ es una primitiva de f.

18. (a)

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int (\log x)^n\, dx &= x\, (\log x)^n - n \int x\, (\log x)^{n-1} \frac{1}{x}\, dx\\ &= x\, (\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1}\, dx.\end{aligned}$$

19. Por el problema 4(x),

$$\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2-1}\, dt = \frac{1}{2} \cosh x \sqrt{\cosh^2 x - 1} - \frac{1}{2} \log(\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1})$$

$$= \frac{\cosh x \operatorname{senh} x}{2} - \frac{1}{2} \log(\cosh x + \operatorname{senh} x)$$

$$= \frac{\cosh x \operatorname{senh} x}{2} - \frac{x}{2}.$$

20. Por el teorema 2, con $g(x) = a + b - x$,

$$\int_a^b f(a+b-x)\, dx = -\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

$$= -\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

21. Por el teorema 2, con $g(x) = x/r$,

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r^2 \int_{-r}^{r} \frac{1}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\, dx$$

$$= r^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - [g(x)]^2}\, g'(x)\, dx$$

$$= r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}.$$

22. La fórmula es válida para $n = 1$ según el problema 14-5. Supongamos que es válida para n. Pongamos $F(u) = \int_0^u f(t)\, dt$. Entonces F es una primitiva de f con $F(0) = 0$. Así pues,

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}\, du = \left. \frac{F(u)(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{u=0}^{u=x} - \int_0^x \frac{-F(u)(x-u)^n}{n!}\, dx$$

$$= 0 + \int_0^x \left(\int_0^{u_n} \left(\dots \left(\int_0^{u_1} F(t)\, dt \right) du_1 \right) \dots \right) du_n$$

$$= \int_0^x \left(\int_0^{u_n} \left(\dots \left(\int_0^{u_1} \left(\int_0^{u} f(t)\, dt \right) du_1 \right) \dots \right) du_n,\right.$$

lo cual puede también ponerse en la forma

$$\int_0^x \left(\int_0^{u_{n+1}} \left(\cdots \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1 \right) \cdots \right) du_{n+1}.$$

23.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen} \lambda t\,dt = \lim_{\lambda\to\infty} \left[\frac{-f(t)\cos\lambda t}{\lambda}\bigg|_a^b + \int_a^b \frac{f'(t)\cos\lambda t}{\lambda}\,dt \right]$$
$$= 0,$$

ya que

$$\left| \frac{-f(t)\cos\lambda t}{\lambda}\bigg|_a^b \right| \leqslant \frac{1}{\lambda}(|f(b)| + |f(a)|),$$

$$\left| \int_a^b \frac{f'(t)\cos\lambda t}{\lambda}\,dt \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

24. Para cada N tenemos

$$\int_a^N u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\bigg|_a^N - \int_a^N u(x)\,v'(x)\,dx.$$

La ecuación deseada se deduce tomando límites (y hace ver que si existen dos cualesquiera de las tres integrales que intervienen, la tercera también existe).

25. (a) La integral

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

ciertamente existe, ya que existe $\int_1^\infty t^{-2}\,dt$ (problema 14-15), y para los t suficientemente grandes, tenemos $e^{-t}t^{x-1} < t^{-2}$ (por el teorema 17-6). Por otra parte, si $t > 0$, entonces $e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$; puesto que la integral $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ existe para $x > 0$ (problema 14-17), se sigue que $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$ existe para $x > 0$ (es una integral impropia si $x < 1$).

(b)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$$

$$= -e^{-t}t^{x}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} xe^{-t}t^{x-1}\,dt$$

$$= 0 + x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = x\Gamma(x).$$

(Si $x < 1$, entonces utilizamos también una segunda versión de la integración por partes para tratar la integral de 0 a 1.)

(c)
$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Demuestra esto que $\Gamma(1) = (1-1)!$. Si $\Gamma(n) = (n-1)!$, entonces $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$, con lo que la fórmula es válida para todo n, por inducción.

26. (a)

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-3} x\,dx$$

$$= \ldots = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{1} x\,dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}.$$

(La demostración se completa con un razonamiento de inducción.) De manera análoga,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

(c)

$$0<\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx\leqslant\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n}x\,dx\leqslant\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1}x\,dx$$

con lo que

$$1\leqslant\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n}x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx}\leqslant\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1}x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx}$$

$$=\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1}x\,dx}{\displaystyle\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1}x\,dx}$$

$$=1+\frac{1}{2n}.$$

(d) Cuando n se hace grande,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\text{ se aproxima a}$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}}=\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{\sqrt{2n+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{2n}{2n+1}}}{\sqrt{2}}\;\frac{1}{\sqrt{n}}\;\frac{2\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$$

El resultado se obtiene teniendo en cuenta que $\sqrt{(2n)/(2n+1)}$ tiende hacia 1 al crecer n. [El procedimiento de Wallis fue completamente distinto. Trabajó con la integral

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$$

(que aparece en el problema 27), con la esperanza de llegar, partiendo de los valores obtenidos para números naturales n, a una fórmula que diera

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1(1-x^2)^{1/2}\,dx.$$

Wallis obtuvo primero la fórmula

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$= \frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n(2n+1)} = \frac{2^n}{2n+1}\;\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

(en cuanto al procedimiento que siguió para obtenerla no tengo seguridad). Llegó después razonando a la conclusión de que tenía que ser

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\, dx = \frac{2^1}{2}\;\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{1!} = \left(\frac{1}{2}!\right)^2.$$

Si interpretamos $\frac{1}{2}!$ como expresión equivalente a $\Gamma(1/2)$, concuerda esto con el problema 29, pero Wallis no conocía la función gamma (que fue inventada por Euler, inspirado principalmente por el trabajo de Wallis). Puesto que $(2n)!/(n!)^2$ es el coeficiente binominal $\binom{2n}{n}$ Wallis esperaba obtener $\frac{1}{2}!$ hallando $\binom{p+q}{p}$ para $p=q=1/2$. Ahora bien,

$$\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)(p+q-1)\cdot\ldots\cdot(p+1)}{q!},$$

y esto tiene sentido aunque p no sea un número natural. Wallis decidió por lo tanto que

$$\binom{\frac{1}{2}+q}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+q\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{3}{2}\right)}{q!}.$$

Con esta interpretación de $\binom{p+q}{p}$ para $p=1/2$, se sigue cumpliendo que

$$\binom{p+q+1}{p} = \frac{p+q+1}{q+1}\binom{p+q}{p}$$

Designando $\binom{\frac{1}{2}+q}{\frac{1}{2}}$ por $W(q)$ esta ecuación puede expresarse poniendo

$$W(q+1) = \frac{\frac{1}{2}+q+1}{q+1}\,W(q) = \frac{2q+3}{2q+2}\,W(q),$$

lo cual nos lleva a la tabla

$$\begin{array}{lcccc} q & 1 & 2 & 3 & \\ W(q) & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} & \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6} & \cdots . \end{array}$$

Pero, puesto que $W(1/2)$ tendría que ser igual a $4/\pi$, Wallis construye también la tabla

$$\begin{array}{lcccc} q & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \\ W(q) & \frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3} & \frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5} & \cdots . \end{array}$$

A continuación Wallis observa que si a_1, a_2, a_3, a_4 son 4 valores sucesivos $W(q)$, $W(q+1)$, $W(q+2)$, $W(q+3)$, de cualquiera de estas dos tablas, entonces

$$\frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \frac{a_4}{a_3} \qquad \left(\text{ya que } \frac{2q+3}{2q+2} > \frac{2q+5}{2q+4} > \frac{2q+7}{2q+6}\right),$$

lo cual implica que

$$\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} > \frac{a_3}{a_2} > \sqrt{\frac{a_4}{a_2}}.$$

Wallis argumenta después que esto tiene que seguir cumpliéndose cuando a_1, a_2, a_3, a_4 son cuatro valores sucesivos de una tabla combinada en la que se dan a q valores tanto enteros como mitades de enteros. Así pues, tomando los cuatro valores sucesivos como $W(n)$, $W\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $W(n+1)$, $W\left(n+\frac{3}{2}\right)$, obtiene

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+4}{2n+3}}{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+2}{2n+1}}} > \frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2n}}$$

$$> \sqrt{\frac{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n+3}{2n+2}}{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}}}$$

lo cual proporciona sencillamente

$$\sqrt{\frac{2n+4}{2n+3}} > \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n)(2n+2)}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+1)}\right] > \sqrt{\frac{2n+3}{2n+2}},$$

de donde deriva de modo inmediato el producto de Wallis.]

27. (a) Pongamos $x = \cos u$, $dx = -\operatorname{sen} u\, du$. Entonces

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} (\operatorname{sen}^{2n} u)(-\operatorname{sen} u)\, du = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} u\, du$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1} \qquad \text{por el problema 26.}$$

Pongamos ahora $x = \cot u$, $dx = -\csc^2 u\, du$. Entonces

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \int_{\pi/2}^{0} (\operatorname{sen}^{2n} u)\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u}\right) du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2(n-1)} u\, du$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2} \qquad \text{por el problema 26.}$$

(b) Si $f(y) = 1-y$ y $g(y) = e^{-y}$, entonces $f(0) = g(0)$ y

$$f'(y) = -1 \leqslant -e^{-y} \qquad \text{para } y \geqslant 0,$$

con lo que $f(y) \leqslant g(y)$ para $y \geqslant 0$, es decir, $1-y \leqslant e^{-y}$ para $y \geqslant 0$. Así pues, en particular, $1-x^2 \leqslant e^{-x^2}$ (para todo x).

La segunda desigualdad es consecuencia de la desigualdad $1 + y \leqslant e^y$, la cual puede ser demostrada de manera análoga (y ya ha aparecido en el problema 17-21).

(c)

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\, dx \leqslant \int_0^\infty e^{-nx^2}\, dx \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx,$$

con lo que

$$\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\leqslant\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx\leqslant\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

Utilizando la sustitución $y=\sqrt{n}\,x$, $dx=1/\sqrt{n}\,dy$, obtenemos

$$\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy,$$

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$

de donde se derivan las desigualdades deseadas.

(d) Del problema 26(d) se deduce que si se toma n suficientemente grande, los números

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left[\sqrt{n-1}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\right]$$

y

$$\sqrt{n}\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right]$$

pueden aproximarse tanto como se quiera a

$$\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

28. (a)

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{x}\,dx=-\cos x\cdot\frac{1}{x}\Big|_a^b-\int_a^b -\cos x\cdot-\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$=\frac{\cos a}{a}-\frac{\cos b}{b}-\int_a^b\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

En particular,

$$\int_1^\infty\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\cos 1}{1}-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}\,dx;$$

la integral última existe, ya que existe la integral

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leqslant \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

(compárese el teorema 22-4).

Por otra parte, la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

existe y es igual a $\int_0^1 f(x)\, dx$, donde f es la función continua con

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Según el problema 15-31,

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\, t}{\operatorname{sen} t/2}\, dt = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos t + \ldots + 2 \cos nt)\, dt = \pi.$$

(c) La ayuda proporciona la respuesta completa, ya que la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} t/2}, & t \neq 0 \end{cases}$$

es integrable en $[0, \pi]$.

(d) Partiendo de (b) y (c) tenemos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\pi} \frac{2 \operatorname{sen}(\lambda + 1/2)\, t}{t}\, dt = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\lambda + 1/2)\, t}{\operatorname{sen} t/2}\, dt = \pi.$$

Utilizando la sustitución $u = (\lambda + 1/2)\, t$, tenemos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\pi} \frac{2 \operatorname{sen}(\lambda + 1/2)\, t}{t}\, dt = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{(\lambda + 1/2)\pi} 2 \operatorname{sen} u \cdot \frac{(\lambda + 1/2)}{u} \cdot \frac{du}{\lambda + 1/2}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du.$$

29. (a) Pongamos $u = t^x$, $du = x t^{x-1}\, dt$. Entonces

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_0^\infty e^{-u^{1/x}} \frac{du}{x}$$
$$= \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-u^{1/x}}\, du.$$

(b)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2}\, du$$
$$= \sqrt{\pi} \qquad \text{por el problema 27.}$$

CAPÍTULO 19

1. (ii) $P_{3,0}(x) = 1 + x + x^2/2$.

(iv) $P_{2n,\pi}(x) = -1 + \dfrac{(x-\pi)^2}{2!} - \dots + \dfrac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$.

(vi) $P_{n,2}(x) = \log 2 + \dfrac{(x-2)}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2^2 2!} + \dots + \dfrac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{2^n n!}$.

(viii) $P_{4,1}(x) = 3 + 9(x-1) + \dfrac{26(x-1)^2}{2!} + \dfrac{66(x-1)^3}{3!} + \dfrac{120(x-1)^4}{4!}$.

(x) $P_{n,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$.

2. (ii) $160 + 50(x-3) - 10(x-3)^2 + (x-3)^4$.

(iv) $9a + 3b + c + (6a + b)(x-3) + a(x-3)^2$.

3. (ii)

$$\sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 2^{2i+1}}{(2i+1)!} \qquad \left(\text{ya que } \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \leqslant 10^{-12} \quad \text{para } 2n+2 \geqslant 20, \text{ o } n \geqslant 9\right).$$

(iv)

$$\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{i!} \qquad \left(\text{ya que } \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4} \quad \text{para } n+1 \geqslant 8, \text{ o } n \geqslant 7\right).$$

4. (i) Para obtener

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-(10^{10})} \qquad \text{o} \qquad (2n+2)! > 10^{10^{10}}$$

basta ciertamente tomar $2n + 2 = 10^{10^{10}}$; podemos también tomar $2n + 2 = 10^{10}$, ya que $(10^{10})!$ es claramente $> 10^{10^{10}}$. Así pues, una posible suma es

$$\sum_{i=0}^{\frac{10^{10}}{2}} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}.$$

(ii)

$$\sum_{i=0}^{1000} \frac{1}{i!} \text{ (ya que por seguro es } (1001)! > 3 \cdot 10^{1000}).$$

(iii) Tenemos que hallar un n con

$$\frac{10^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-20}$$

Ahora bien,

$$\frac{10^{100+k}}{(100+k)!} = \frac{10^{100}}{100!} \cdot \frac{10}{101} \cdot \frac{10}{102} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{100+k} < \frac{10^{100}}{100!} \cdot \frac{1}{10^k},$$

con lo que

$$\frac{10^{100+k}}{(100+k)!} < 10^{-20}$$

cuando

$$\frac{10^{100}}{100!} \cdot \frac{1}{10^k} < 10^{-20} \qquad \text{o} \qquad \frac{10^{120}}{100!} < 10^k.$$

Esto ocurre ciertamente para $k = 120$, por lo que podemos tomar $2n + 2 = 220$ o $n = 109$, lo que da la suma

$$\sum_{i=0}^{109} \frac{(-1)^i 10^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

(iv)

$$\sum_{i=0}^{234} \frac{10^i}{i!} \qquad \left(\text{ya que } \frac{3\,{}^{10}10^{235}}{(235)!} < \frac{10^5 \cdot 10^{100}}{(100)!} \cdot \frac{1}{10^{135}} < 10^{-30}\right).$$

(v)

$$\sum_{i=0}^{\frac{10^{10}}{2}} (-1)^i \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2i+1}}{2i+1} \left(\text{ya que } \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+3}}{2n+3} < 10^{-(10^{10})} \text{ para } 2n+3 = 10^{10}\right)$$

5. (a)

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

Puesto que

$$\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{5}=\arctan\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right)=\arctan\frac{5}{12},$$

tenemos

$$4\arctan\frac{1}{5}=\arctan\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right)=\frac{120}{119},$$

con lo que

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\arctan\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

(b) Para calcular π con un error $< 10^{-6}$, tenemos que calcular $\pi/4$ con un error menor que $10^{-6}/4$, con lo que basta calcular $\arctan 1/5$ y $\arctan 1/239$ con un error $< 10^{-6}/20 = 10^{-7}/2$. Ahora bien,

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+R, \qquad |R|\leqslant\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Así pues, para $x = 1/5$ y $x = 1/239$ necesitamos que sea

$$\frac{1}{(2n+3)5^{2n+3}}<\frac{1}{2\cdot 10^7},$$

$$\frac{1}{(2n+3)239^{2n+3}}<\frac{1}{2\cdot 10^7},$$

respectivamente. Podemos tomar $n = 4$ y $n = 0$, respectivamente. De este modo π es

$$16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}\right)-4\left(\frac{1}{239}\right)$$

con un error $< 10^{-6}$. Para obtener los 5 primeros decimales de π tenemos que convertir en decimal a cada uno de los términos entre paréntesis. Si calculamos cada uno de ellos con 7 cifras decimales exactas introduciremos un error adicional de a lo sumo 10^{-7}. Puesto que en realidad tenemos

$$\frac{1}{(2 \cdot 4 + 3)5^{2\cdot 4+3}} < \frac{1}{3 \cdot 10^7},$$

$$\frac{1}{3 \cdot 239^3} < \frac{1}{3 \cdot 10^7},$$

este error adicional no constituirá ningún problema. Los cálculos son como sigue:

$$\begin{array}{rcr}
1/5 = 0{,}20000000 & & \\
1/5 \cdot 5^5 = 0{,}00006400 & & 1/3 \cdot 5^3 = 0{,}00266666 \\
1/9 \cdot 5^9 = 0{,}00000005 & & 1/7 \cdot 5^7 = 0{,}00000182 \\
\hline
0{,}20006405 & & 0{,}00266848 \\
-\,0{,}00266848 & \longleftarrow & \\
\hline
0{,}19739557 & & \\
\times\, 16 & & \\
\hline
11843730 & & \\
1973955 & & 1/239 \quad = 0{,}0041841 \\
\hline
 & & \times\, 4 \\
3{,}1583280 & & 0{,}0167364 \\
-\,0{,}0167364 & \longleftarrow & \\
\hline
3{,}1415916 & &
\end{array}$$

El error en este resultado es $< 10^{-6}$; en consecuencia podemos estar seguros de que 14159 son los 5 primeros decimales de π (debido a la circunstancia feliz de que el dígito siguiente de nuestra solución es distinto de 9). Los diez primeros decimales de π son

$$3{,}1415926535.$$

6. Está claro que

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k},$$

con lo que

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

La forma de Cauchy del resto es

$$R_{n,0}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)(x-0),$$

y la forma de Lagrange es

$$R_{n,0}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)}(1+t)^{\alpha-n-1}(x-0)^{n+1}.$$

7. (ii) $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$.

(iv) $c_0 = 0$; $c_i = a_{i-1}/i$ para $i > 0$.

8. (a) Al ser

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{2n+1}} = 0,$$

tenemos

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{R(x^2)}{(x^2)^{2n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{R(x^2)}{x^{4n+2}}.$$

Ahora bien,

$$\operatorname{sen}(x^2) = P(x^2) + R(x^2);$$

puesto que $Q(x) = P(x^2)$ es un polinomio de grado $4n+2$, se sigue del corolario al teorema 3 que Q es el polinomio de Taylor de grado $4n+2$ para f en 0.

(b)

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \neq 4\ell+2 \\ \dfrac{(-1)^\ell(4\ell+2)!}{(2\ell+1)!}, & k = 4\ell+2. \end{cases}$$

(c)

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \neq n\ell \\ \dfrac{g^{(\ell)}(0)\,(n\ell)!}{\ell!}, & k = n\ell. \end{cases}$$

9.

$$\left|\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\,dt\right| = \int_x^0 \frac{e^t}{n!}|x-t|^n\,dt$$

$$\leqslant \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}\,dt \qquad \text{ya que } e^x \leqslant 1 \qquad \text{para } x \leqslant 0$$

$$= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

10. Para $-1 < x \leqslant t \leqslant 0$ tenemos

$$0 < 1 + x \leqslant 1 + t \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+x}.$$

Así pues,

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x}\,dt \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

11. (a) Por hipótesis,

$$-M(x-a)^n \leqslant g'(x) \leqslant M(x-a)^n \qquad \text{para } x \geqslant a.$$

Del teorema del valor medio se sigue que

$$\frac{-M(x-a)^{n+1}}{n+1} \leqslant g(x) - g(a) \leqslant \frac{M(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

es decir, que $|g(x) - g(a)| \leqslant M(x-a)^{n+1}/(n+1)$. El caso $x \leqslant a$ se trata de manera análoga.

(b) Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|g'(x)/(x-a)^n| \leqslant \epsilon$ para $|x-a| < \delta$. Esto significa que $|g'(x)| \leqslant \epsilon |x-a|^n$ para $|x-a| < \delta$. La parte (a) implica que $|g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon |x-a|^{n+1}/(n+1)$ para $|x-a| < \delta$. Al cumplirse esto para todo $\delta > 0$, se sigue que

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

(c) Al ser

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

tenemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!}(x-a)^{i-1} \\ &= f'(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(a)}{j!}(x-a)^{j} \\ &= f'(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f')^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j} \\ &= f'(x) - P_{n-1,a,f'}(x). \end{aligned}$$

(d) El teorema 1 se cumple para $n = 1$, según la definición de f'. Supongamos ahora que el teorema 1 se cumple para $n-1$, y para todas las funciones f para las que existen $f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$. Si g es una función para la que $g'(a), \ldots, g^{(n)}(a)$ existen, entonces $f = g'$ es una función para la que existen $f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$. En consecuencia,

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x) - P_{n-1,a,g'}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Al ser $(g - P_{n,a,g})' = g' - P_{n-1,a,g'}$, se sigue de la parte (b) que

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - P_{n,a,g}(x)}{(x-a)^{n}} = 0.$$

12. Supóngase que $|f^{(n+1)}|$ está acotada, por algún M, en un cierto intervalo alrededor de a. Entonces para un x de este intervalo tenemos

$$|R_{n,a}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!}|x-a|^{n+1},$$

con lo que

$$\frac{|R_{n,a}(x)|}{|x-a|^{n}} \leqslant M|x-a|,$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n}} = 0.$$

Una demostración análoga es aplicable para la forma integral del resto y para la forma de Cauchy, suponiendo $|f^{(n+1)}|$ acotada.

13. El problema 13-27 implica que

$$\begin{aligned} R_{n,a}(x) &= \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a) \end{aligned}$$

para algún t de (a, x). Análogamente, el problema 13-28, con $f^{(n+1)}/n!$ para f y $g(t) = (x - t)^n$, proporciona la forma de Lagrange. (Sin embargo, en ambos casos empezamos con la suposición adicional de ser $f^{(n+1)}$ integrable.)

14. (a) Esto es consecuencia de

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + R_{2,a}(h),$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + R_{2,a}(-h),$$

ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{2,a}(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{R_{2,a}(-h)}{h^2} = 0.$$

(b)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - h^2 - 0}{h^2} = 0$$

y análogamente para $\lim_{h\to 0^-}$.

15. Si $f'' > 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \\ &> f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{para } x \neq a, \end{aligned}$$

lo cual dice que la gráfica de f en x queda por encima de la tangente por a.

16. La demostración es casi exactamente la misma que la dada en el texto para $f'' + f = 0$.

17. (a)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} = (f^{(n)})' &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j+1)} = \left(\sum_{j=0}^{n-2} a_j f^{(j+1)}\right) + a_{n-1} f^{(n)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{j-1} f^{(j)} + a_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j-1} + a_{n-1} a_j) f^{(j)}. \end{aligned}$$

(b) Poniendo $a_{-1} = a_{-2} = 0$, tenemos

$$f^{(n+2)} = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j-1} + a_{n-1}a_j) f^{(j+1)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-2} (a_{j-1} + a_{n-1}a_j) f^{(j+1)} + (a_{n-2} + a_{n-1}{}^2) \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j-2} + a_{n-1}a_{j-1} + a_{n-2}a_j + a_{n-1}{}^2 a_j) f^{(j)}.$$

(c) A partir de la ecuación

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^1 f^{(j)}$$

obtenemos

$$f^{(n+2)} = \sum_{j=0}^{n-2} b_j{}^1 f^{(j+1)} + b_{n-1}{}^1 f^{(n)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} b_{j-1}{}^1 f^{(j)} + b_{n-1}{}^1 \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^2 f^{(j)},$$

donde

$$b_j{}^2 = b_{j-1}{}^1 + b_{n-1}{}^1 a_j,$$
$$| b_j{}^2 | \leqslant | b_{j-1}{}^1 | + | b_{n-1}{}^1 | \, | a_j | \leqslant 2N^2 + 2N^3 \leqslant 4N^3.$$

La fórmula general se demuestra de manera análoga por inducción sobre k.

(d) Pongamos $M = M_1 + \dots + M_{n-1}$, donde

$$M_i = \sup \{ | f^{(i)}(t) | : 0 \leqslant t \leqslant x \}.$$

(e) Está claro que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k. Entonces, por el teorema de Taylor,

$$| f(x) | = \left| \int_0^x \frac{f^{(n+k+1)}(t)}{(n+k)!} (x-t)^{n+k} \, dt \right|$$
$$\leqslant \frac{M \cdot 2^{k+1} N^{k+2} | x |^{n+k+1}}{(n+k+1)!}$$
$$\leqslant \frac{M \cdot | 2Nx |^{n+k+1}}{(n+k+1)!}.$$

Puesto que $| 2Nx |^{n+k+1}/(n+k+1)!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera sin más que tomar k (y por lo tanto $n+k+1$) suficientemente grande, se sigue que $f(x)=0$.

(f) La diferencia $f=f_1-f_2$ satisface la misma ecuación diferencial y $f^{(j)}(0)=0$ para $0\leqslant j\leqslant n-1$. Así pues, $f=0$.

[En el caso $n=2$, las ecuaciones

$$f(0)=c_1+c_2$$
$$f'(0)=\alpha_1c_1+\alpha_2c_2$$

pueden resolverse siempre que sea $\alpha_1\neq\alpha_2$:

$$c_1=\frac{\alpha_2f(0)-f'(0)}{\alpha_2-\alpha_1},\qquad c_2=\frac{\alpha_1f(0)-f'(0)}{\alpha_1-\alpha_2}.$$

El caso $n=3$ tiene respuestas más largas de explicar, pero es igual de directo. El caso general, para los que conocen los determinantes, depende del hecho de que el «determinante de Vandermonde»

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{\,n-1} & \alpha_2^{\,n-1} & \dots & \alpha_n^{\,n-1}\end{pmatrix}$$

es distinto de cero si los α_i son todos distintos. De hecho su valor es $\prod_{i>j}(\alpha_i-\alpha_j)$.]

18. (a) Está claro que $f=0$ de orden 2 en 0. La derivada segunda $f''(0)$ no existe, puesto que

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 4x^3\text{ sen }1/x^2-x\cos 1/x^2, & x\neq 0,\end{cases}$$

y
$$\lim_{h\to 0}\frac{4h^3\text{ sen }1/h^2-h\cos 1/h^2}{h}$$

no existe.

(b) Tengo que presentar aquí mis excusas. Al escribir por primera vez este poblema tenía la idea de una demostración, que con un examen más detenido resultó ser incorrecta. En consecuencia, la ayuda dada por la parte (b) es del todo desorientadora. Conduce a la ecuación

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=\frac{m(a)}{2}+\frac{m(a+h)}{2}+\frac{R_a(h)}{h^2}+\frac{R_{a+h}(a)}{h^2};$$

por desgracia, nada se sabe acerca de $\lim_{h\to 0} R_{a+h}(a)/h^2$. La demostración correcta resulta ser mucho más complicada.

Empezamos considerando el caso particular en que $m(a) = 0$ para todo a. Escribiendo la ecuación (*) para $x = a + h$ y $x = a - h$, obtenemos entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{R_a(h) + R_a(-h)}{h^2} = 0.$$

(Compárese con el problema 14). El límite de la derecha recibe el nombre de derivada segunda de Schwartz, y el resultado que sigue, que resuelve el caso $m = 0$, es conocido con el nombre de teorema de Schwartz.

Si f es continua y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0$$

para todo x, entonces f es lineal.

Demostración. Dados dos puntos $a < b$, defínase

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Entonces ϕ satisface la misma condición que f y $\phi(a) = \phi(b)$. Haremos ver que $\phi(x) = \phi(a)$ para todo x de $[a, b]$, demostrando así que f es lineal en $[a, b]$. Al ser a y b arbitrarios, quedará demostrado con esto que f es lineal.

Supóngase que $\phi(x) > \phi(a)$ para algún x de $[a, b]$. Entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$g(x) = \phi(x) - \epsilon(x - a)(b - x) > \phi(a).$$

Puesto que la función continua g satisface $g(a) = \phi(a) = \phi(b) = g(b)$, se sigue que g tiene un máximo y en el intervalo abierto (a, b). Entonces

$$\frac{g(y+h) + g(y-h) - 2g(h)}{h^2} \leqslant 0.$$

Pero

$$\frac{g(y+h) + g(y-h) - 2g(y)}{h^2} = \frac{\phi(y+h) + \phi(y-h) - 2\phi(y)}{h^2} + 2\epsilon.$$

(El término 2ϵ es la derivada segunda de Schwartz de la función $\alpha(x) = -\epsilon(x - a)(b - x)$ y coincide con la derivada ordinaria de esta misma función.) Esto constituye una contradicción, ya que el segundo miembro tiende hacia 2ϵ cuando h tiende hacia 0. De manera análoga se ve que para ningún x de $[a, b]$ puede ser $\phi(x) < \phi(a)$.

El caso general puede ahora deducirse como sigue. Al ser m continua, existe una función g con $g'' = m$. Entonces la función $f - g$ satisface (*) con $m = 0$. De este modo $f - g$ es lineal y en consecuencia $f'' = g'' = m$.

(c) Si existe una función continua m tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{m(a)}{3!}(x-a)^3 + R_a(x),$$

donde $\lim_{x\to a} R_a(x)/(x-a)^3 = 0$, entonces $f'''(a) = m(a)$. La demostración seguirá estrechamente la misma línea que la de la parte (b). Lo mismo que en la parte (b), podemos reducir el caso general al caso particular en que $m = 0$.

Empezamos observando que si f es una función que tiene derivada tercera, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)}{h^3} = \frac{f'''(x)}{3};$$

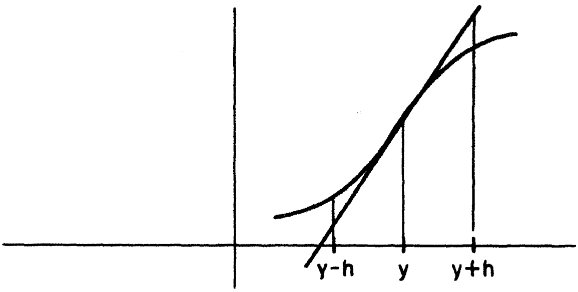
la demostración es parecida a la del problema 14, utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 en vez del de grado 2. Por supuesto, la misma demostración hace ver que toda función que satisface

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R_a(x),$$

con $\lim_{x\to a} R_a(x)/(x-a)^3 = 0$, satisface también

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)}{h^3} = 0.$$

Demostraremos ahora que toda función con esta propiedad es una función polinómica de grado 2. Basta hacer ver que si $f'(a) = f'(b)$, entonces f es constante en $[a, b]$, ya que, lo mismo que en la parte (b), siempre podemos restar una función polinómica adecuada de grado 2. Para demostrar que f es constante, basta demostrar que $f'(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$. Supongamos que esto no se cumpliera, y, para fijar ideas, supongamos que $f'(x_0) > 0$ para algún x_0 de (a, b). Sea q una función polinómica de grado 3 con $q'(a) = q'(b) = 0$ pero $q'(x) > 0$ para todo x de (a, b) (por ejemplo, $q(x) = -x^3/3 + (a+b)x^2/2 - abx$, con lo que $q'(x) = (x-a)(b-x)$.) Sea $g(x) = f(x) - \epsilon q(x)$. Entonces $g'(x_0) = f'(x_0) - \epsilon q'(x_0)$ es > 0 para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. En consecuencia, g' tendrá un máxi-



mo en algún punto y de (a, b).

Si es $h > 0$, entonces por el teorema del valor medio,

$$g(y+h) - g(y) \leqslant hg'(y),$$
$$g(y) - g(y-h) \leqslant hg'(y),$$

con lo que

$$\frac{g(y+h) - g(y-h) - 2hg'(y)}{h^3} \leqslant 0.$$

La misma desigualdad puede deducirse también para $h < 0$. Pero

$$\frac{g(y+h) - g(y-h) - 2hg'(y)}{h^3} = \frac{f(y+h) - f(y-h) - 2hf'(y)}{h^3} - \frac{q'''(y)\,\epsilon}{3}$$
$$= \frac{f(y+h) - f(y-h) - 2hf'(y)}{h^3} + \frac{2\epsilon}{3}.$$

Esto constituye una contradicción, ya que el segundo miembro tiende hacia $2\epsilon/3$ cuando h tiende hacia 0.

CAPÍTULO 20

1. (a) Si $\alpha > 0$ es una solución de la ecuación

$$(1) \qquad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

entonces $\sqrt{\alpha}$ es una solución de la ecuación

$$a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + \ldots + a_0 = 0.$$

(b) Si α satisface (1), entonces $\alpha + r$ satisface

$$a_n(x-r)^n + a_{n-1}(x-r)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0;$$

esta ecuación, con coeficientes racionales, tiene las mismas soluciones que la ecuación con coeficientes enteros obtenida multiplicando todos los términos por el denominador común de los distintos coeficientes.

Análogamente, αr satisface

$$a_n\left(\frac{x}{r}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

2. Puesto que

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6},$$
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 49 + 20\sqrt{6},$$

está claro que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ satisface $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Puesto que

$$[\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})]^2 = 2(4 + 2\sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3},$$
$$[\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})]^4 = (8 + 4\sqrt{3})^2 = 112 + 64\sqrt{3},$$

está claro que $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ satisface $x^4 - 16x^2 + 16 = 0$.

3. (a) Si $f(p/q) = 0$, entonces

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = \left(x - \frac{p}{q}\right)(b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0)$$

para ciertos $b_0, \dots, b_{n-1}$, que serán números racionales. Al ser $\alpha - p/q \neq 0$, tenemos

$$b_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + b_0 = 0,$$

en contradicción con lo supuesto de ser mínimo el grado del polinomio original.

(b) Está claro que puede expresarse $f(p/q)$ como un número racional de la forma r/q^n. Al ser $f(p/q) \neq 0$, tenemos $|r| \geqslant 1$, con lo que $|f(p/q)| \geqslant 1/q^n$.

(c) Si $|\alpha - p/q| < 1$, entonces

$$f(p/q) = \frac{f(p/q) - f(\alpha)}{p/q - \alpha} = f'(x) \qquad \text{para } |x - \alpha| < 1$$
$$< M,$$

con lo que

$$|\alpha - p/q| > |f(p/q)|/M > 1/(Mq^n).$$

4. Si α satisficiera a una ecuación polinómica de grado n, habría entonces algún número c con $|\alpha - p/q| > c/q^n$ para todos los números racionales p/q. Ahora bien

$$\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \dots + \frac{1}{10^{k!}}$$

puede expresarse en la forma

$$\frac{p}{10^{k!}}$$

para cierto entero p, y

$$0 < \alpha - \frac{p}{10^{k!}} < \frac{2}{10^{(k+1)!}}.$$

Debemos tener pues, para todo k,

$$\frac{c}{(10^{k!})^n} < \frac{2}{10^{(k+1)!}}$$

o

$$\frac{10^{(k+1)!}}{(10^{k!})^n} < \frac{2}{c},$$

o

$$\frac{(10^{k!})^{k+1}}{(10^{k!})^n} < \frac{2}{c},$$

o

$$(10^{k!})^{k+1-n} < \frac{2}{c},$$

lo cual es evidentemente falso para un n suficientemente grande.

5. (a) Si los elementos de A y de B pueden disponerse en las sucesiones respectivas $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$, entonces los elementos de $A \cup B$ pueden disponerse en la sucesión

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

(sólo que deben suprimirse las repeticiones, en el caso en que A y B tengan elementos comunes).

(b) Dispónganse los números racionales en forma de lista siguiendo las flechas (suprimiendo repeticiones).

(c) Sígase el orden indicado por las flechas de la figura.

$$\begin{array}{ccccc}
(0, 0) & (0, 1) & (0, -1) & (0, 2) & (0, -2) \\
(1, 0) & (1, 1) & (1, -1) & (1, 2) & (1, -2) \\
(-1, 0) & (-1, 1) & (-1, -1) & (-1, 2) & (-1, -2) \\
(2, 0) & (2, 1) & (2, -1) & (2, 2) & (2, -2)
\end{array}$$

(d) Supóngase que los elementos de A_i se hallan dispuestos según una lista $a_1^i, a_2^i, a_3^i, \ldots$. Entonces los elementos de $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ pueden disponerse según la matriz

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{matrix}$$

Aplíquese ahora el mismo artificio que en las partes (b) y (c), suprimiendo repeticiones.

(e) Aplíquese la parte (d) siendo A_i el conjunto de todas las (m, n, i). (A_i es numerable, según la parte (c).)

(f) Si el conjunto de las n-tuplas es numerable, se ve entonces que es numerable el conjunto de todas las $(n+1)$ – tuplas, sin más que aplicar la parte (d), tomando como A_i el conjunto de todás las $(n+1)$ – tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, i)$.

(g) (Se sobreentiende que se trata de funciones polinómicas de coeficientes enteros.) Puesto que toda función polinómica de grado n puede ser descrita mediante una $(n+1)$ – tupla de enteros $(a_0, \ldots, a_n)$, estas funciones polinómicas pueden disponerse según una lista $p_1, p_2, p_3, \ldots$ .Para cada p_i, sean $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}$ sus raíces (si hay menos de n raíces, complétese la lista con ceros). Entonces

$$\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,n}, \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{2,n}, \alpha_{3,1}, \ldots, \alpha_{3,n}, \ldots$$

es una lista de todas las raíces deseadas. Suprímanse ahora las repeticiones.

(h) Aplíquese la parte (d) tomando como A_i el conjunto de todas las funciones polinómicas de grado i, con coeficientes enteros.

6. Si este número estuviera en la lista, se trataría del número α_n para algún n. Pero no puede ser α_n, ya que de α_n difiere en la cifra decimal n-ésima. (Esta artificiosa construcción, y toda la que sigue un modelo análogo, es conocida con el nombre de «método diagonal de Cantor».)

7. (a) Supóngase que es $0 < a_1 < \ldots < a_n < 1$, y que $\lim_{x \to a_i^+} f(x) - \lim_{x \to a_i^-} f(x) > \epsilon$. Tómese

$$0 < a_1' < a_1 < a_1'' < a_2' < a_2 < a_2'' < \ldots < a_n' < a_n < a_n'' < 1.$$

Entonces

$$f(a_i'') - f(a_i') > \epsilon,$$

con lo que

$$f(1) - f(0) > \sum_{i=1}^{n} f(a_i'') - f(a_i') > n\epsilon,$$

y por lo tanto $n < [f(1) - f(0)]/\epsilon$.

(b) Sea A_n el conjunto de todos los a de $[0, 1]$ con $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) > 1/n$. Entonces A_n es finito, con lo que según el problema 5(d), $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ es numerable.

8. (a) El conjunto de estos intervalos es numerable, ya que cada intervalo viene determinado mediante un par de números racionales y el conjunto de los números racionales es numerable. Puesto que cada valor $f(x)$ puede ser descrito en términos de estos intervalos (como máximo en este intervalo), los valores $f(x)$ constituyen un conjunto numerable.

(b) Si f es continua, no puede tomar dos valores distintos, ya que si así ocurriera, tomaría entonces todos los valores intermedios, los cuales constituyen un conjunto no numerable.

(c) Se trata sólo de una ligera variante de la parte (a), lo mismo en cuanto al enunciado que en cuanto a la demostración.

(d) Esto se deduce de la parte (c) de la misma forma que la parte (b) se deduce de la (a).

CAPÍTULO 21

1. (ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}{1+\dfrac{4}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{4}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(iv) Si n es par, entonces

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n/2)!}{n^{n/2}\cdot n^{n/2}} \leqslant \frac{(n/2)!}{n^{n/2}} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2};$$

análogamente, si n es impar, entonces

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot[(n-1)/2]!}{n^{(n+1)/2}\cdot n^{(n-1)/2}} \leqslant \frac{[(n-1)/2]!}{n^{(n-1)/2}} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2}$$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log n)/n = 0$ (ya que $\lim\limits_{x\to\infty} (\log x)/x = 0$, según el problema 17-8(b)). Así pues, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(\log n)/n} = e^0$ (según el teorema 1) $= 1$.

(viii) Supóngase $a \geqslant b$. Entonces $\sqrt[n]{a^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n+b^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n+a^n}$, es decir, $a \leqslant \sqrt[n]{a^n+b^n} \leqslant \sqrt[n]{2}\,a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, según la parte (v). [Fue necesario suponer $a, b \geqslant 0$ para esta demostración; en efecto, si $a = 1$ y $b = -1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ no existe.]

(x) Según el problema 2-6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + \dots}{n^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p+1} + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \dots = \frac{1}{p+1}.$$

2. (a) La sucesión $\{a_n\}$ debe ser eventualmente constante, es decir, existe un N tal que todos los a_n son iguales cuando es $n > N$.

(b) Todas las subsucesiones convergentes son de la forma

$$a_1, \dots, a_n, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

o

$$a_1, \dots, a_n, -1\ -1, -1, -1, \dots,$$

donde $a_1, \dots, a_n$ es una subsucesión finita, cada uno de cuyos términos puede ser, o bien 1 o -1.

(c) Todas las subsucesiones convergentes son de la forma

$$a_1, \dots, a_n, m, m, m, m, \dots,$$

donde $a_1, \dots, a_n$ y m son números naturales.

(d) Todos los α de $[0, 1]$.

3. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy, y supóngase que $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \ell$. Cualquiera que sea $\epsilon > 0$, tómese J de modo que $|\ell - a_{n_j}| < \epsilon/2$ para $j > J$. Tómese después N de manera que $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ para $n,m > N$. Sea $N_0 = \max(N, n_j)$. Si $n > N_0$, entonces $|a_n - a_{n_{J+1}}| < \epsilon/2$ y $|a_{n_{J+1}} - \ell| < \epsilon/2$. En consecuencia, $|a_n - \ell| < \epsilon/2$.

(b) Supóngase que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, y sea $\{a_{n_j}\}$ una subsucesión de $\{a_n\}$. Si $\epsilon > 0$, existe entonces un N tal que $|\ell - a_n| < \epsilon$ para $n > N$. Al ser $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, existe un J tal que $n_j > N$ para $j > J$. Así pues, $|\ell - a_{n_j}| < \epsilon$ para $j > J$. Por lo tanto, $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \ell$.

6. (ii) $\displaystyle\int_0^2 e^x\,dx = e^2 - 1.$

(iv) 0 (ya que

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leqslant n \cdot \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}).$$

(vi) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi/4.$

7. (a) Si $a = 1 + h$, entonces $a^n = (1 + h)^n \geqslant 1 + nh$. Al ser $h > 0$, está claro que $\lim_{n\to\infty} nh = \infty$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, ya que $\lim_{n\to\infty} 1/a^n = \infty$, según la parte (a).

(c) Si $\sqrt[n]{a} = 1 + h$, entonces $a = (1 + h)^n \geqslant 1 + nh$, con lo que $h \leqslant (a - 1)/n$. Así pues, $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant 1 + (a-1)/n$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1/(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a}) = 1$, según la parte (c).

(e) Si $\sqrt[n]{n} = 1 + h$, entonces

$$n = (1 + h)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} h^2 ,$$

de donde

$$h \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

con lo que

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

8. (a) Supóngase que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Tómese N tal que $|a_n - \ell| < 1$ para $n > N$. Entonces $|a_n| < \max(|\ell| + 1, |a_1|, \ldots, |a_N|)$ para todo n.

(b) Tómese N tal que $|a_n - 0| < a_1$ para $n > N$. El máximo de $a_1, a_2, \ldots, a_N$ es entonces el máximo de a_n para todos los n.

9. (a) Esta relación equivale a

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{n},$$

lo cual se cumple, puesto que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n} \qquad \text{para } x \text{ en } (n, n+1).$$

(b) Al ser

$$a_n - a_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1}$$
$$> 0 \qquad \text{según la parte (a),}$$

la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Para demostrar que $a_n \geqslant 0$, súmense las desigualdades

$$\log(j+1) - \log j < \frac{1}{j}$$

para $j = 1, \ldots, n-1$, con lo que se obtiene

$$\log n < 1 + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

10. (a) Al ser f creciente,

$$f(i) < \int_i^{i+1} f(x)\, dx < f(i+1);$$

súmense estas desigualdades para $i = 1, \ldots, n-1$.

(b) Por la parte (a) tenemos

$$\log 1 + \ldots + \log(n-1) < \int_1^n \log x\, dx < \log 2 + \ldots + \log n,$$
$$\log(n-1)! < n \log n - n + 1 < \log n!,$$
$$(n-1)! < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n!.$$

Así pues,

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

11. (a)

$$x^{b(x)} = x^{(\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x))} = \lim_{n\to\infty} x^{a_n(x)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}(x) = b(x).$$

(b) El valor máximo de $y^{1/y} = e^{(\log y)/y}$ se alcanza cuando es máximo $(\log y)/y$, que es e, según el problema 17-24.

(c) Está claro que $a_1(x) = x \leqslant e$. Si $a_n(x) \leqslant e$, entonces,

$$a_{n+1}(x) = x^{a_n(x)} \leqslant (e^{1/e})^e \leqslant e.$$

(d) $b(\sqrt{2}) = 2$, ya que $(\sqrt{2})^2 = 2$ (véase la parte (a)).
$b(e^{1/e}) = e$.

(e) La parte (a) hace ver que si $x = y^{1/y}$, entonces $b(x) = y$. La condición $x = y^{1/y}$ equivale a $\log x = (\log y)/y$. Utilizando la función f definida en el problema 17-24 (f), esto puede expresarse en la forma

$$b(x) = f_1^{-1}(\log x).$$

Así pues, b es derivable en $(0, e^{1/e})$, y

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(\log x))} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xf_1'(b(x))} \\ &= \frac{[b(x)]^2}{x(1 - \log b(x))}. \end{aligned}$$

(f) Derivando $x^{b(x)} = b(x)$ se obtiene

$$x^{b(x)} \left[\frac{b(x)}{x} + b'(x) \log x \right] = b'(x),$$

$$b(x) \left[\frac{b(x)}{x} + b'(x) \log x \right] = b'(x),$$

$$b'(x) = \frac{[b(x)]^2}{x(1 - b(x) \log x)}.$$

Al ser $x^{b(x)} = b(x)$, tenemos $b(x) \log x = \log b(x)$, con lo que

$$b'(x) = \frac{[b(x)]^2}{x(1 - \log b(x))}.$$

12. Si $\epsilon > 0$, tómese N de modo que $|a_n - \ell| < \epsilon$ para $n \geqslant N$. Entonces

$$|a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+M} - M\ell| < \epsilon M,$$

con lo que

$$\left| \frac{1}{N+M} [a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+M}] - \frac{M\ell}{N+M} \right| < \frac{\epsilon M}{N+M} < \epsilon.$$

Elíjase M de manera que

$$\left| \frac{M\ell}{N+M} - \ell \right| < \epsilon \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{N+M}[a_1 + \ldots + a_N] \right| < \epsilon.$$

Entonces

$$\left| \frac{1}{N+M}[a_1 + \ldots + a_{N+M}] - \ell \right| < 3\epsilon.$$

13. Si $\epsilon > 0$, tómese N de modo que $|a_{n+1}/a_n - \ell| < \epsilon$ para $n \geqslant N$. Entonces

$$\ell - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \epsilon \qquad \text{para } n \geqslant N,$$

con lo que

$$(\ell - \epsilon)^m < \frac{a_{n+m}}{a_{n+m-1}} \cdot \frac{a_{n+m-1}}{a_{n+m-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < (\ell + \epsilon)^m,$$

de donde

$$\left| \sqrt[m]{\frac{a_{n+m}}{a_n}} - \ell \right| < \epsilon.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sqrt[n+m]{a_{n+m}} &= \sqrt[n+m]{\frac{a_{n+m}}{a_n}} \cdot \sqrt[n+m]{a_n} \\ &= \left(\sqrt[m]{\frac{a_{n+m}}{a_n}} \right)^{m/n+m} \cdot \sqrt[n+m]{a_n}. \end{aligned}$$

Al ser $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[n+m]{a_n} = 1$, se sigue que $\sqrt[n+m]{a_{n+m}}$ puede hacerse diferir de 1 en menos de 2ϵ tomando m suficientemente grande.

14. (a) Supóngase que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell > 1$. Al ser $\ell - 1 > 0$, existiría un n con $|\ell - a_n| < \ell - 1$ y por lo tanto $a_n > 1$, lo cual es una contradicción. De manera análoga se ve que tampoco podemos tener $\ell < 0$.

(b) $a_n = 1/n$.

15. Al valor

$$\underbrace{f(f(f \ldots f}_{k \text{ veces}}(x) \ldots))$$

designémoslo por $f^k(x)$. Entonces, por el teorema 1,

$$f(\ell) = f(\lim_{k\to\infty} f^k(x)) = \lim_{k\to\infty} f(f^{(k)}(x))$$
$$= \lim_{k\to\infty} f^{(k+1)}(x) = \ell.$$

16. (a) Supóngase que $f(x) > x$. Por ser f creciente, $f(f(x)) > f(x)$. En consecuencia, $f(f(f(x))) > f(f(x))$, etc. La sucesión x, $f(x)$, $f(f(x))$, ... es, pues, creciente y está acotada por 1, por lo que tiene límite. La demostración cuando $x < f(x)$ es análoga.

(b) Existe un m con $g(m) = m$ (según el problema 7-11). Según la parte (a), la sucesión $f^k(m)$ tiene un límite ℓ, el cual es un punto fijo de f (utilizando la notación introducida en la solución al problema 15). Además,

$$f^k(m) = f^k(g(m)) = g(f^k(m)),$$

ya que $f \circ g = g \circ f$. Por lo tanto, por el teorema 1,

$$\ell = \lim_{k\to\infty} f^k(m) = \lim_{k\to\infty} g(f^k(m)) = g(\lim_{k\to\infty} f^k(m)) = g(\ell).$$

(c) Cuando escribí la parte (c), no se conocía todavía la solución de este problema. Pocas semanas más tarde aparecieron en *Notices* de la American Mathematical Society, Vol. 14, Núm. 2, dos comunicaciones independientes diciendo que la respuesta que resuelve el problema es «no». Lo cual parece indicar que no era éste el lugar adecuado para un tal problema.

17. (a)

$$c^m + c^{m+1} + \ldots + c^n = c^m(1 + c + \ldots + c^{n-m})$$
$$= \frac{c^m(1 - c^{n-m+1})}{1 - c}$$
$$= \frac{c^m - c^{n+1}}{1 - c}.$$

(b) Al ser $|c| < 1$, tenemos $\lim_{m\to\infty} c^m = \lim_{n\to\infty} c^{n+1} = 0$.

(c)

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \ldots + (x_{m-1} - x_m)|$$
$$\leqslant |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n-2}| + \ldots + |x_{m-1} - x_m|$$
$$\leqslant c^n + \ldots + c^{m-1},$$

con lo que $\lim_{m,n\to\infty} |x_n - x_m| = 0$, según la parte (*b*).

18. (a) Si $c = 0$, entonces f es constante, y por lo tanto continua. Si $c \neq 0$ y $\epsilon > 0$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ para $|x - a| < \epsilon/c$.

(b) Si $f(\ell) = \ell$ y $f(m) = m$, entonces

$$|\ell - m| = |f(\ell) - f(m)| \leqslant c|\ell - m|,$$

con lo que $\ell = m$, ya que $c < 1$.

(c) Si

$$x_n = f^n(x) = \underbrace{f(f(f}_{n \text{ veces}} \dots f(x) \dots)),$$

entonces

$$|x_n - x_{n+1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leqslant c|x_{n-1} - x_n| \leqslant c^2|x_{n-1} - x_{n-2}|$$
$$\leqslant \dots \leqslant c^{n-1}|x_2 - x_1|.$$

En consecuencia, el problema 17(c) implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente. Según el problema 15, converge hacia un punto fijo.

19. (a) Está claro que $\{y_n\}$ es decreciente y que está acotada (por una cota inferior de $\{x_n\}$).

(b) (i) 0.
(ii) 0.
(iii) 1.
(iv) 1.

(c) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n$, donde $z_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$. Puesto que $z_n \leqslant y_n$ para cada n, está claro que $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n \leqslant \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n$.

(d) Supóngase primero que $\lim_{n \to \infty} x_n = \ell$. Si $\epsilon > 0$ existe un N con $|x_n - \ell| < \epsilon$ para $n \geqslant N$. Así pues, $x_N < \ell + \epsilon$, $x_{N+1} < \ell + \epsilon$, ..., con lo que $y_N \leqslant \ell + \epsilon$. Análogamente $z_N \geqslant \ell - \epsilon$. Puesto que esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, tenemos $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \ell = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n$.

Recíprocamente, supóngase que $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \ell$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un N con $\ell - \epsilon < z_N < y_N < \ell + \epsilon$. Esto implica que $\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon$ para todo $n \geqslant N$.

(e) Pongamos $\ell = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n$. Si $a < \ell$, entonces $a < y_n$ para todos los n. En consecuencia, $a < x_n$ para infinitos x_n, con lo que a no es una casi cota superior de A. Por otra parte, si $a > \ell$, entonces $a > y_n$ para todos los n excepto un número finito de ellos. En consecuencia, $a > x_n$ para todos excepto un número finito de los n, con lo que a es una casi cota superior. Así pues, ℓ es el ínfimo de todas las casi cotas superiores de A.

20. (a) Pongamos $s_k = a_1 + \dots + a_k$. Entonces

$$\begin{aligned} a_1b_1 + \dots + a_nb_n &= b_1s_1 + b_2(s_2 - s_1) + \dots + b_n(s_n - s_{n-1}) \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n. \end{aligned}$$

Al ser $b_i - b_{i-1} \geqslant 0$, y $m \leqslant s_i \leqslant M$ para cada i, obtenemos

$$\begin{aligned} m(b_1 - b_2) &+ m(b_2 - b_3) + \dots + m(b_{n-1} - b_n) + mb_n \\ &\leqslant a_1b_1 + \dots + a_nb_n \\ &\leqslant M(b_1 - b_2) + M(b_2 - b_3) + \dots + M(b_{n-1} - b_n) + Mb_n, \end{aligned}$$

o

$$mb_1 \leqslant a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leqslant Mb_1.$$

(b) Aplíquese la parte (a) a la serie $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ y $b_k, b_{k+1}\ b_{k+2}, \dots$.

21. (a) (i) 0.

(ii) 0 y $1/n$ para cada número natural n.

(iii) -1 y 1.

(iv) No hay puntos límite.

(v) Todos los números reales.

(b) Si hay infinitos puntos a de A que satisfacen $|x - a| < \epsilon$, entonces por seguro que hay un a con $a \neq x$. A la inversa, si solamente hubiera un número finito de estos puntos $a_1, \dots, a_n$ y $\epsilon_1 > 0$ es el mínimo de todos los $|x - a_i|$ que son distintos de cero, entonces no existirían en A puntos a satisfaciendo $|x - a| < \epsilon_1$.

(c) Cualquiera que sea $\epsilon > 0$, el número $\overline{\lim}\ A - \epsilon$ *no* es una casi cota superior de A, por lo que hay infinitos números y en A con $y > \overline{\lim}\ A - \epsilon$. Además, no puede haber infinitos de estos números y con $y > \overline{\lim}\ A + \epsilon$, pues en este caso ninguno de los números comprendidos entre $\overline{\lim}\ A$ y $\overline{\lim}\ A + \epsilon$ puede ser casi cota superior de A, con lo que $\overline{\lim}\ A + \epsilon$ sería una cota inferior más grande del conjunto de las casi cotas superiores. Esto indica que existen en A infinitos números y comprendidos entre $\overline{\lim}\ A - \epsilon$ y $\overline{\lim}\ A + \epsilon$. En consecuencia, lim A *es* un punto límite de A. Si hubiese otro punto $\alpha > \overline{\lim}\, A$, entonces ningún número menor que α podría ser casi cota superior, con lo que α sería cota inferior del conjunto de las casi cotas superiores, lo cual es una contradicción. La demostración para $\underline{\lim}\, A$ es análoga.

(d) Tómense puntos distintos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en A. La sucesión $\{x_n\}$ es acotada, ya que A está contenido en $[a, b]$. Así pues, existe una subsucesión convergente $\{x_{n_j}\}$. Sea $\ell = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$. Para todo $\epsilon > 0$ existe un J tal que $|\ell - x_{n_j}| < \epsilon$ para todos los $j > J$. Al ser los x_{n_j} todos distintos, esto indica que hay en A infinitos a con $|\ell - a| < \epsilon$.

(e) Tómese una sucesión de intervalos $I_1, I_2, I_3, \ldots$ con $I_1 = [a, b]$, y cada I_{j+1} una mitad de I_j, de tal modo que cada I_j contenga infinitos puntos de A. Si x es el punto de todos los I_j, entonces x es un punto límite de A.

22. Elíjase x_n con $f(x_n) > n$. Existe una subsucesión x_{n_j} que converge hacia un punto x que está en $[a, b]$. Así pues, para todo $\epsilon > 0$ existen infinitos x_{n_j} con $|x - x_{n_j}| < \epsilon$, y en consecuencia f es no-acotada en $[x - \epsilon, x + \epsilon]$, en contradicción con el hecho de ser f continua en x.

23. (a) Sea $\#(n)$ el número de los j para los que j/n está en $[a, b]$. Para determinar $\#(n)$, sea j/n la más pequeña de estas fracciones que está en $[a, b]$ y k/n la más grande. Entonces $(j-1)/n < a \leqslant j/n$ y $k/n \leqslant b < (k+1)/n$.

Así pues,

$$\frac{k}{n} - \frac{j}{n} \leqslant b - a < \frac{k+1}{n} - \frac{j-1}{n},$$
$$k - j \leqslant n(b-a) < k - j + 2.$$

Al ser $\#(n) = k - j + 1$, tenemos también

$$k - j < \#(n) < k - j + 2,$$

con lo que

$$|\#(n) - n(b-a)| < 2.$$

Sumando estas desigualdades para 1, ..., n, obtenemos

$$|\#(1) + \dots + \#(n) - [1 + \dots + n](b-a)| < 2n.$$

En consecuencia,

$$\left| \frac{\#(1) + \dots + \#(n)}{1 + \dots + n} - (b-a) \right| < \frac{2n}{1 + \dots + n}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} 2n/(1 + \dots + n) = 0$, esto demuestra que

$$\frac{\#(1) + \dots + \#(n)}{1 + \dots + n} \quad \text{se aproxima a } (b-a).$$

Por supuesto, $\#(1) + \dots + \#(n) = N(1 + \dots + n;\ a, b)$. Para un número arbitrario m, sea n el número más grande para el que $1 + \dots + n \leqslant m$. Entonces

$$m - (1 + \dots + n) \leqslant n.$$

Está claro que

$$|N(m;\ a, b) - [\#(1) + \dots + \#(n)]| \leqslant m - (1 + \dots + n) \leqslant n.$$

En consecuencia

$$(1) \left| \frac{N(m;\ a,b)}{m} - \frac{[\#(1) + \dots + \#(n)]}{m} \right| \leqslant \frac{n}{m} \leqslant \frac{n}{1 + \dots + n} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Además,

$$\frac{\#(1) + \dots + \#(n)}{m} = \frac{\#(1) + \dots + \#(n)}{1 + \dots + n} \cdot \frac{1 + \dots + n}{m};$$

ya que

$$\frac{1 + \dots + n}{1 + \dots + (n+1)} \leqslant \frac{1 + \dots + n}{m} \leqslant \frac{1 + \dots + n}{1 + \dots + n} = 1,$$

se sigue que $[\#(1) + \dots + \#(n)]/m$ puede aproximarse tanto como se quiera a $[\#(1) + \dots + \#(n)]/(1 + \dots + n)$ sin más que tomar m (y por lo tanto n) suficientemente grande. Puesto que la expresión última puede aproximarse tanto como se quiera a $b - a$ tomando m suficientemente grande, de (1) se deduce que $\lim\limits_{m\to\infty} N(m;\ a, b)/m = b - a$.

(b) Considérese el caso particular en que $s(x) = c$ si x está en $[a, b]$ y $s(x) = 0$ para los demás x de $[0, 1]$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(a_1) + \dots + s(a_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{N(n;\ a, b)}{n} = c(b-a) = \int_0^1 s.$$

Esto se cumple, en particular, cuando $a = b$. Una demostración análoga es aplicable cuando $s(x) = c$ cuando x está en (a, b). Toda función en escalera s puede expresarse en la forma $s = s_1 + \dots + s_m$, donde cada s_i es de uno de estos tipos particulares. Entonces

$$\int_0^1 s = \sum_{i=1}^m \int_0^1 s_i = \sum_{i=1}^m \lim_{n\to\infty} \frac{s_i(a_1) + \dots + s_i(a_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(a_1) + \dots + s(a_n)}{n}.$$

(c) Sea $\epsilon > 0$. Según el problema 13-17, existe una función en escalera $s \leqslant f$ con $\int_a^b [f - s] < \epsilon$. Así pues, si n es suficientemente grande,

$$-\epsilon + \int_a^b f < \int_a^b s < \frac{s(a_1) + \dots + s(a_n)}{n} + \epsilon \leqslant \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n} + \epsilon.$$

Análogamente, puesto que existe una función en escalera $s \geqslant f$ con $\int_a^b [s - f] < \epsilon$, tenemos para n suficientemente grande

$$-2\epsilon + \int_a^b f < \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n} < 2\epsilon + \int_a^b f.$$

24. (a) Si hubiera infinitos de tales puntos a en $[0, 1]$, entonces el conjunto de todos estos puntos tendría un punto límite x en $[0, 1]$. Para todo $\delta > 0$ habría un a con $|a - x| < \delta/2$ y $|\lim_{y\to a} f(y) - f(a)| > \epsilon$. En consecuencia existiría a' con $|a' - a| < \delta/2$ (y por lo tanto $|a' - x| < \delta$) tal que $|f(a') - f(a)| > \epsilon$. Pero al ser $\lim_{y\to x} f(x) = \ell$ para algún ℓ, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - \ell| < \epsilon/2$ para $|y - x| < \delta$. En particular, si $|a - x| < \delta$ y $|a' - x| < \delta$, entonces $|f(a) - f(a')| \leqslant$ $\leqslant |f(a) - \ell| + |f(a') - \ell| < \epsilon$, lo cual es una contradicción.

(b) Según la parte (a), el conjunto A_n de los puntos a en los que $|\lim_{y\to a} f(y) - f(a)| > 1/n$ es finito. Según el problema 20-5, la unión $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ es numerable. Esta unión no es otra cosa que el conjunto de todos los puntos a en que f es discontinua.

CAPÍTULO 22

1. (ii) Convergente, por el teorema de Leibnitz. La serie no es absolutamente convergente, ya que

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right).$$

(iv) Convergente, por el teorema de Leibnitz. (La función $f(x) = (\log x)/x$ es decreciente para $x \geqslant e$, ya que $f'(x) = (1 - \log x)/x^2$.) La serie no es absolutamente convergente (véase (viii)).

(vi) Convergente, ya que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \leqslant \frac{1}{n^{2/3}}.$$

(viii) Divergente, ya que

$$\int_1^N \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{(\log N)^2}{2} \to \infty \text{ cuando } N \to \infty,$$

y $f(x) = (\log x)/x$ es decreciente para $x \geqslant e$ (véase (iv)).

(x) Divergente, ya que

$$\frac{1}{(\log n)^k} > \frac{1}{n}$$

para n suficientemente grande (problema 17-8).

(xii) (Absolutamente) convergente, por (xi).

(xiv) Divergente, ya que

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} > \frac{1}{2n},$$

para n suficientemente grande.

(xvi) Convergente, ya que

$$\int_2^N \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = -\frac{1}{\log N} + \frac{1}{\log 2} \to \frac{1}{\log 2} \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

(xviii) Convergente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,/(n+1)^{n+1}}{n!\,/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

según el problema 17-12.

(xx) Divergente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!\,/(n+1)^{n+1}}{3^n n!\,/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e},$$

según el problema 17-12.

2. (a) Según el problema 21-10,

$$\frac{e^n n!}{n^n} > e,$$

con lo que la serie ciertamente diverge.

(b) Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}/a^{n+1}(n+1)!}{n^n/a^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae,$$

la serie converge para $a < 1/e$ y diverge para $a > 1/e$. Por el proma 21-10,

$$\frac{n^n}{e^n n!} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n n!} > \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(n+1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > \frac{2}{e(n+1)}$$

para n suficientemente grande, con lo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n/e^n n!$ diverge.

3. (a) La función $f(y) = e^y/y^y$ es decreciente para $y \geqslant 1$, ya que

$$f'(y) = \frac{y^y e^y - e^y y^y(1 + \log y)}{y^{2y}} = \frac{e^y}{y^y} (-\log y).$$

Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (e/n)^n$ claramente converge, ya que $(e/n)^n \leqslant e^2/n^2$ para $n \geqslant 2$, con lo que la integral también converge.

(b) Puesto que $f(x) = (\log x)^{-\log x}$ decrece claramente para $x \geqslant 1$, la serie converge si $\int_0^{\infty} (\log x)^{-\log x}\, dx$ existe. La sustitución $y = \log x$, $dx = e^y\, dy$, cambia esta integral en

$$\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}\, dy,$$

la cual existe, según la parte (a).

(c) La sustitución $y = \log x$, $dx = e^y\, dy$ transforma

$$\int_1^{\infty} (\log x)^{-\log (\log x)}\, dx \qquad \text{en}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^{\log y}}\, dy.$$

Pero

$$\frac{e^y}{y^{\log y}} = \frac{e^y}{e^{(\log y)^2}} = e^{y-(\log y)^2} = e^{y(1-(\log y)^2/y)}.$$

Puesto que $\lim_{y\to\infty} (\log y)^2/y = 0$ (problema 17-8), se sigue que $e^y/y^{\log y}$ se aproxima a e^y al crecer y, con lo que la integral ciertamente diverge.

4. (b) Defínase $\{a_n\}$ de manera inductiva como sigue:

$$a_1 = [10x],$$
$$a_n = [10^n x - (10^{n-1}a_1 + \dots + 10a_{n-1})].$$

Para cada n tenemos

$$0 \leqslant 10^n x - (10^{n-1}a_1 + \dots + 10a_{n-1}) - a_n < 1,$$

con lo que

$$(*) \qquad 0 \leqslant 10^{n+1}x - (10^n a_1 + \dots + 10^2 a_{n-1} + 10a_n) < 10,$$

y por lo tanto $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 9$ para cada n. Además, partiendo de $(*)$ tenemos

$$0 \leqslant x - (a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \dots + 10^{-n}a_n) < 10^{-n},$$

con lo que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

(c) Sea $\alpha = 10^k a_1 + \dots + 10a_{k-1} + a_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} &= \frac{\alpha}{10^k} + \frac{\alpha}{10^{2k}} + \frac{\alpha}{10^{3k}} + \dots \\ &= \frac{\alpha}{10^k}\left[1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{\alpha}{10^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{9\alpha}{10^{k-1}}.\end{aligned}$$

(d) El número a_n de la parte (b) satisface

$$0 \leqslant \frac{10^n p}{q} - (10^{n-1}a_1 + \dots + 10a_{n-1} + a_n) < 1.$$

Pero $10^n p/q$ puede ponerse en la forma $k + r/q$ donde k es un entero y $0 \leqslant r < q - 1$. En este caso $a_{n+1} = [10r/q]$. Puesto que existen a lo sumo q fracciones distintas r/q, tendrá que haber ciertos m y n con $m > n$ y $a_{n+1} = [10r/q] = a_{m+1}$. Es fácil ver que tendremos entonces $a_{n+2} = a_{m+2}$, etc.

5. La demostración del teorema de Leibnitz hace ver que si N es par, entonces

$$s_N \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leqslant s_{N+1},$$

con lo que $\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - s_N \right| \leqslant s_{N+1} - s_N = a_{N+1} \leqslant a_N$. (Se cumple la desigualdad estricta salvo que sea $s_N = s_{N+1}$ o $a_{N+1} = 0$.) La demostración es análoga si N es impar.

6. Existe un N tal que $c/2 < a_n/b_n < 2c$ para $n > N$. De aquí que

$$b_n < \frac{2}{c} a_n \qquad \text{y} \qquad a_n < 2c\, b_n.$$

La prueba de comparación ordinaria implica entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y recíprocamente.

7. Supóngase que es $r < 1$. Elíjase un s con $r < s < 1$. Existe un N tal que $\sqrt[n]{a_n} \leqslant s$ para $n \geqslant N$. Entonces es $a_n \leqslant s^n$, con lo que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

converge. Si $r > 1$, y $r > s > 1$, existe entonces un N tal que $\sqrt[n]{a_n} \geqslant s$ para $n \geqslant N$. Así pues, $a_n \geqslant s^n \geqslant 1$, con lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

8. La sucesión 1, —1, 1, —1, 1, —1, ... es sumable Cesaro hacia 1/2.

9. (a) Elíjase m de modo que $a_1, \ldots, a_n$ aparezcan entre los $b_1, \ldots, b_m$.

(b) Esto es consecuencia inmediata de la parte (a), ya que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el supremo de todas las sumas parciales s_n. (En realidad, hemos demostrado solamente que la desigualdad se cumple si la suma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existe.)

(c) La desigualdad inversa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es consecuencia de la parte (b), ya que $\{a_n\}$ es también una reordenación de $\{b_n\}$. Se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existe y es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) Sean $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ las series formadas respectivamente por los términos positivos y por los términos negativos de $\{a_n\}$ y sean $\{p_n'\}$ y $\{q_n'\}$ las series definidas de manera análoga para $\{b_n\}$. Entonces $\{p_n'\}$ es una reordenación de $\{p_n\}$ y lo mismo tenemos para $\{q_n'\}$ respecto de $\{q_n\}$. Así pues, por la parte (d), $\sum p_n' = \sum p_n$ y $\sum q_n' = \sum q_n$, existiendo las sumas de la derecha por ser $\{a_n\}$ absolutamente convergente. Por lo tanto, $\{b_n\}$ es absolutamente convergente, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum p_n' - \sum q_n' = \sum p_n - \sum q_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

10. (a) Hagamos $b_j = a_{n_j}$. Entonces

$$|b_j| + |b_{j+1}| + \ldots + |b_k| = |a_{n_j}| + |a_{n_{j+1}}| + \ldots + |a_{n_k}|$$
$$\leqslant |a_{n_j}| + |a_{n_{j+1}}| + |a_{n_{j+2}}| + \ldots + |a_{n_k}|.$$

En consecuencia, $\lim_{j,k \to \infty} |b_j| + \ldots + |b_k| = 0$.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge absolutamente, entonces una por lo menos de las series $\sum p_n$, $\sum q_n$ diverge, siendo éstas respectivamente la serie de los términos positivos y la de los negativos. De ellas tómese como $\sum b_n$ una que corresponda.

(c) Las series $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ y $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ convergen ambas según la parte (a). Lo mismo vale para las series $a_1 + 0 + a_3 + 0 + + a_5 + \ldots$ y $0 + a_2 + 0 + a_4 + 0 + a_6 + \ldots$, cuya suma es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

11. Para todo N, tenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

El resultado se desprende por ser $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$.

12. Elíjase $\delta > 0$ de modo que $|\operatorname{sen} x| \geqslant 1/2$ en $(k\pi + \pi/2 - \delta,\ k\pi + \pi/2 + \delta)$. Entonces

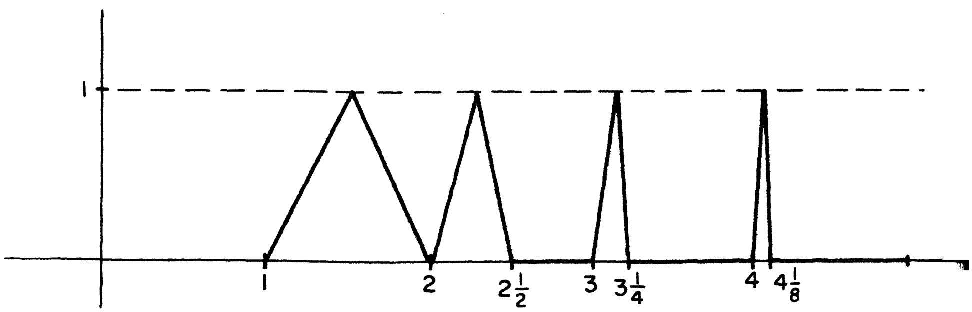
$$\int_{k\pi+\pi/2+\delta}^{k\pi+\pi/2-\delta} |(\operatorname{sen} x)/x|\, dx \geqslant \frac{\delta}{k\pi + \pi/2}.$$

Al ser divergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi + \pi/2},$$

lo mismo ocurre con la integral.

13. Sea f la función cuya gráfica es la de la figura adjunta.



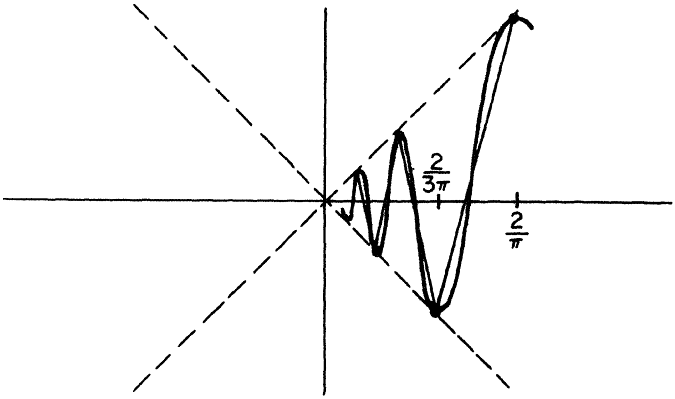
14. Para la partición

$$P = \left\{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \dots, \frac{2}{\pi}, 1\right\}$$

tenemos

$$\ell(f, P) > \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} + \dots + \frac{2}{(2n+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right),$$

y estas sumas no están acotadas.



16. (a)

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1} r^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} r^k} = \frac{r\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-k)/(k+1)!}{(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-k+1)/k!} = r\frac{\alpha-k}{k+1}.$$

Está claro que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1,$$

con lo que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\binom{\alpha}{k+1} r^{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k} r^k\right|} = |r|.$$

(b)

$$
\begin{aligned}
|R_{n,0}(x)| &= \left|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1}\right| \\
&\leqslant \left|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}\right| \to 0, \qquad \text{según la parte (a).}
\end{aligned}
$$

(c) Tenemos $0 < 1 + x < 1 + t \leqslant 1$. Si $\alpha - 1 \geqslant 0$, entonces $(1 + t)^{\alpha-1} \leqslant 1$. Si $\alpha - 1 < 0$, entonces $(1 + t)^{\alpha-1} < (1 + x)^{\alpha-1}$. Así pues, $(1 + t)^{\alpha-1} \leqslant M$, con lo que $|x(1 + t)^{\alpha-1}| \leqslant |x| M$. Además, por ser $-1 < x$ y $t \leqslant 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
-t &\geqslant xt, \\
0 > x - t &\geqslant x + xt, \\
0 < \frac{x-t}{x} &\leqslant 1 + t, \qquad \text{por ser } x < 0 \\
0 < 1 - t/x &\leqslant 1 + t, \\
0 < \frac{1 - t/x}{1 + t} &\leqslant 1, \qquad \text{ya que } 1 + t > 0.
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
\begin{aligned}
|R_{n,0}(x)| &= \left| (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x(1+t)^{\alpha-1} \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \right| \\
&\leqslant |x\alpha M| \cdot \left|\binom{\alpha-1}{n} x^n\right| \to 0 \qquad \text{según la parte (a).}
\end{aligned}
$$

17. (a) Según el problema 21-20 (b), si $m \leqslant a_1 + \dots + a_n \leqslant M$, entonces
$$b_k m \leqslant a_k b_k + \dots + a_n b_n \leqslant b_k M.$$
Al ser $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, esto demuestra que $\lim\limits_{k,n\to\infty} a_k b_k + \dots + a_n b_n = 0$.

(b) Sea $a_n = (-1)^{n+1}$; las sumas parciales son acotadas. Así pues, si $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \dots \geqslant 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ converge.

(c) Tómese $b_n = 1/n$ y $a_n = \cos nx$. Las sumas parciales de $\{a_n\}$ están acotadas, ya que, según el problema 15-31,

$$
\begin{aligned}
|\cos x + \dots + \cos nx| &= \left| \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x}{2 \operatorname{sen} x/2} - \frac{1}{2} \right| \leqslant \left| \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x}{2 \operatorname{sen} x/2} \right| + \frac{1}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{2|\operatorname{sen} x/2|} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

18. Al ser

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \underbrace{a_3 \geqslant a_4} \geqslant \underbrace{a_5 \geqslant a_6 \geqslant a_7 \geqslant a_8} \geqslant \dots,$$

tenemos

$$\begin{aligned} a_2 &\leqslant a_2 \\ 2a_4 &\leqslant a_3 + a_4 \\ 4a_8 &\leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

con lo que

$$\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{2^N} a_k \right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

19. (a) Este problema depende del problema 1-18, o más precisamente, de la siguiente generalización:

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

(Esto puede demostrarse, por ejemplo, imitando la parte (b) del problema 1-18, o viendo la solución del problema 13-33(c).) Tenemos

$$|a_nb_n + \dots + a_mb_m| \leqslant \sqrt{a_n^2 + \dots + a_m^2}\sqrt{b_n^2 + \dots + b_m^2}.$$

Esto demuestra que la condición de Cauchy para $\{a_n^2\}$ y $\{b_n^2\}$ implica la condición de Cauchy para $\{a_nb_n\}$.

(b) Aplíquese la parte (a) con $b_n = 1/n$.

20. Elíjase n de modo que $a_n + \dots + a_m < \epsilon$ para $m \geqslant n$. Entonces

$$(m - n)a_m \leqslant a_n + \dots + a_m < \epsilon.$$

Al ser $\lim_{m \to \infty} m/(m - n) = 1$ y

$$ma_m = \frac{m}{m - n} \cdot (m - n)\, a_m,$$

se sigue que $ma_m < 2\epsilon$ cuando m es suficientemente grande.

21. El contraejemplo lo tenemos tomando como $\{a_n\}$ la sucesión

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots.$$

22. Supóngase $p/q < 1/n$ y $p/q > 1/(n+1)$. Entonces $np < q$, y

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n+1} = \frac{pn + p - q}{q(n+1)}.$$

El numerador $pn + p - q$ es menor que $q + p - q = p$. (Por supuesto, puede ser todavía más pequeño cuando se expresa la fracción en forma irreducible.)

CAPÍTULO 23

1. (ii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f (de hecho se hace eventualmente 0) en $[a, b]$ pero no converge uniformemente en $\mathbf{R}$.

   (iv)
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

   $\{f_n\}$ no converge uniformemente hacia f.

2. (ii) $\log(-a) - \dfrac{x}{a} - \dfrac{x^2}{2a^2} - \dfrac{x^3}{3a^3} - \dfrac{x^4}{4a^4} - \cdots$.

   (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{2k}$.

3. (ii) $1/(1 + x^3)$.

   (iv) Por el problema 10,
$$\frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} - \frac{1}{5\cdot 4} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 4} + \cdots$$
$$= \lim_{x\to 1} (1 + x) \log(1 + x) - x \qquad \text{por la parte (iii)}$$
$$= 2 \log 2 - 2.$$

   (v) Si
$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \cdots,$$

   entonces para $|x| < 1$ tenemos
$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = \frac{1}{1 + x^3} \qquad \text{por la parte (ii)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-x/3+2/3}{x^2-x+1},$$

$$= \frac{1/3}{x+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1},$$

con lo que

$$f(x) = \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\operatorname{arc\,tan}\frac{x-1/2}{\sqrt{3/4}} + $$

$$+ \frac{3\sqrt{3}}{16}\operatorname{arc\,tan}\frac{1/2}{\sqrt{3/4}}$$

$$= \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\operatorname{arc\,tan}\frac{x-1/2}{\sqrt{3/4}} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\,\frac{\pi}{6}.$$

En consecuencia,

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\log 2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{16}\,\pi.$$

5. (a)

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\right]x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x).$$

(b)

$$g'(x) = \frac{(1+x)^{\alpha}f'(x) - f(x)\,\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \qquad \text{por la parte (a),}$$

por lo que g es una constante c. Así pues, $f(x) = c(1+x)^{\alpha}$. Al ser $f(0) = 1$, tenemos $c = 1$.

6. (a) $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0.$

(b) $a_0 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, ya que f es continua en 0. Así pues,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}\right) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n\right) = xg(x).$$

Pero $g(x_n) = 0$ (para todo $x_n \neq 0$), con lo que según el resultado acabado de demostrar, es $a_1 = 0$. Así pues

$$f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n,$$

con lo que $a_2 = 0$, etc.

(c) Aplíquese la parte (*b*) a $f - g$.

7. Si f es par, entonces $f^{(n)}$ es impar cuando n es impar, con lo que $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$ cuando n es impar. Si f es impar, entonces $f^{(n)}$ es impar cuando n es par, con lo que $a_n = 0$ cuando n es par.

8. (a) Está claro que $a_{n-1} \leqslant a_n$. De aquí que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{2a_n}{a_n} \leqslant 2.$$

(b)

$$\frac{|a_{n+1}x^n|}{|a_nx^{n-1}|} \leqslant 2|x| < 1 \qquad \text{para } |x| < 1/2.$$

(c) Tenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots,$$

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = x + x^2 + 2x^3 + \dots,$$

$$x^2f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{n+1} = x^2 + x^3 + \dots,$$

con lo que

$$f(x) = 1 + xf(x) + x^2f(x).$$

(d) Pongamos $\alpha = (-1 - \sqrt{5})/2$ y $\beta = (-1 + \sqrt{5})/2$. Entonces

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1/\sqrt{5}}{x - \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{-1/\sqrt{5}}{x - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1/\sqrt{5}}{x - \alpha} - \frac{1/\sqrt{5}}{x - \beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\alpha^3} - \dots\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\beta} - \frac{x}{\beta^2} - \frac{x^2}{\beta^3} - \dots\right).$$

En consecuencia,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\beta^n} - \frac{1}{\alpha^n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1-5}{4}\right)^n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

9. La serie de potencias para $f(x) = \log(1-x)$ es $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$, donde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la serie de potencias para $h(x) = \log(1+x)$. Puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge solamente para $-1 < x \leqslant 1$, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ converge solamente para $-1 \leqslant x < 1$. Siendo $g(x) = f(x) - h(x)$, sus series de potencias convergen solamente en el caso de $-1 < x < 1$.

10. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $x \geqslant x^2 \geqslant x^3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. En consecuencia, el lema de Abel hace ver que $|a_m x^m + \ldots + a_n x^n| < \epsilon$ si $|a_m + \ldots + a_n| < \epsilon$. La última condición se cumple cuando m y n son suficientemente grandes. En consecuencia, $|a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots| < \epsilon$ cuando m es suficientemente grande y para todos los x de $[0, 1]$. Esto significa que para todos los x de $[0, 1]$,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - (a_0 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1})\right| < \epsilon$$

cuando m es suficientemente grande. Esto equivale precisamente a afirmar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

11. Sea $a_n = (-1)^n$. Para $0 \leqslant x < 1$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x},$$

con lo que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

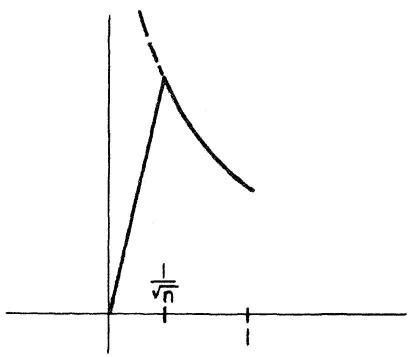
12. Dado $\epsilon > 0$, tómese N tal que $|g(x) - f_n'(x)| < \epsilon$ para todo x de $[a, b]$. Entonces

$$\left| \int_a^x g - \int_a^x f_n' \right| < \epsilon$$

para todo x de $[a, b]$. Pero $\int_a^x g = f(x) - f(a)$ (véase la demostración del teorema 3), con lo que $|f(x) - f_n'(x)| < \epsilon$ para todo x de $[a, b]$.

13. (a) Tómese N tal que si $n \geqslant N$, entonces $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1$ para todo x de $[a, b]$. Al ser f_N acotada, existe un M tal que $|f_N(x)| \leqslant M$ para todo x de $[a, b]$. Entonces $|f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1 \leqslant M + 1$.

(b) Sea $f_n(x) = nx$ para $0 \leqslant x \leqslant 1/\sqrt{n}$, y $f(x) = 1/x$ para $1/\sqrt{n} \leqslant x \leqslant 1$. Entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1/x$ para $0 < x \leqslant 1$.



14. Póngase $f_n(x) = [f(x + 1/n) - f(x)]/(1/n)$.

15. Sea $\{a_n\}$ la sucesión 0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5 3/5, 4/5, 1/6, 5/6, ... Sea $f_n(x) = 0$ si $x \neq a_1, \dots, a_n$, y sea $f_n(a_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant n$.

16. (a) Supóngase que $\{u_0, \dots, u_m\}$ contiene a $\{t_0, \dots, t_n\}$. Para cada i tenemos

$$t_i = u_\alpha < u_{\alpha+1} < \ldots < u_\beta = t_{i+1}$$

para ciertos $u_\alpha, \ldots, u_\beta$. Entonces f tiene el valor constante s_i en cada $(u_{\alpha+j-1}, u_{\alpha+j})$. Así pues, la suma $\sum_{i=1}^{n} s_i(t_i - t_{i-1})$ es la suma $\sum_{j=1}^{m} s_j'(u_j - u_{j-1})$ donde s_j' es el valor constante de f en $(u_j - u_{j-1})$. Para tratar el caso general, considérese una partición que contenga a la vez a $\{u_0, \ldots, u_m\}$ y a $\{t_0, \ldots, t_n\}$.

(b) Tómese N tal que para $n > N$ tengamos $|f(x) - s_n(x)| < \epsilon/2$ para todo x de $[a, b]$.

(c) A partir de $|s_n(x) - s_m(x)| < \epsilon$ se sigue fácilmente que

$$\left|\int_a^b s_n - \int_a^b s_m\right| < \epsilon\,(b - a).$$

(d) Tómese N de modo que para $n > N$ tengamos a la vez $|f(x) - s_n(x)| < \epsilon/2$ y $|f(x) - s_m(x)| < \epsilon/2$ para todo x de $[a, b]$.

(e) Para cualquier $\epsilon > 0$, tómese N tal que si $n > N$, entonces

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n - \int_a^b s_n\right| < \frac{\epsilon}{3},$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n - \int_a^b t_n\right| < \frac{\epsilon}{3},$$

$$|s_n(x) - t_n(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \qquad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

La última ecuación implica que

$$\left|\int_a^b s_n - \int_a^b t_n\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

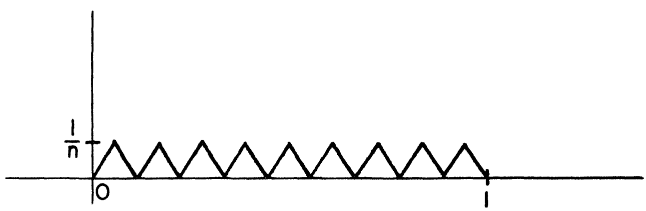
Se sigue que $\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n - \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n\right| < \epsilon.$

(f) Definamos el conjunto
$A = \{y : a \leqslant y \leqslant b$ y existe una función en escalera s en $[a, y]$ tal que $|f(x) - s(x)| < \epsilon$ para todo x de $[a, y]\}$.
Sea $\alpha = \sup A$. Al ser f continua en α, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$ cuando $|x - \alpha| < \delta$. Existe un y en A con $\alpha - \delta < y < \alpha$. Así pues, existe una función en escalera s definida en $[a, y]$ con $|f(x) - s(x)| < \epsilon$ para todo x de $[a, y]$. Definamos $s_1(x) = s(x)$ cuando x está en $[a, y]$ y $s_1(x) = f(\alpha)$ cuando $y < x \leqslant \alpha$. Entonces s_1 es una función en escalera definida en $[a, \alpha]$ con $|f(x) - s_1(x)| < \epsilon$ para todo x de $[a, \alpha]$. Esto hace ver que α está en A. De manera

análoga, si $\alpha < b$, tómese δ lo mismo que antes y sea s una función en escalera definida en $[a, \alpha]$ con $|f(x) - s(x)| < \epsilon$ cuando x está en $[a, \alpha]$. Si $s_1(x)$ está definida como $s(x)$ cuando x está en $[a, \alpha]$ y como $f(\alpha)$ cuando $\alpha < x \leqslant \alpha + \delta/2$, entonces $|f(x) - s_1(x)| < \epsilon$ cuando x está en $[a, \alpha + \delta/2]$. Así pues, $\alpha + \delta/2$ está en A, contradiciendo la definición de α. Es por lo tanto $\alpha = b$, lo cual completa la demostración.

[La clase de las funciones regladas puede determinarse de manera más explícita como sigue. Una función en escalera s tiene la propiedad de que $\lim_{x \to a^+} s(x)$ y $\lim_{x \to a^-} s(x)$ existen para todo a. No resulta difícil demostrar que un límite uniforme de funciones en escalera tiene que tener la misma propiedad (la demostración consiste en una sencilla modificación de la demostración del teorema 2). La recíproca es también cierta: si f tiene límites laterales por la derecha y por la izquierda en cada punto, entonces f es reglada. Obsérvese que la clase de las funciones regladas es más restringida que la clase de las funciones integrables. Por ejemplo, si $f(0) = 0$ y $f(x) = \text{sen } 1/x$ para $0 < x \leqslant 1$, entonces f es integrable en $[0, 1]$ (según el problema 13-14, por ejemplo), pero no es reglada.]

17. La función f_n es la que viene indicada en la figura. La longitud de cada f_n es 2, ya que dos lados de un triángulo equilátero suman una longitud que es el doble de la del otro lado.



CAPÍTULO 24

1. (ii) $|(3+4i)^{-1}| = 1/|3+4i| = 1/5;$

$$\theta = -\text{argumento de } 3+4i = -\arc\tan 4/3.$$

(iv) $|\sqrt[7]{3+4i}| = \sqrt[7]{|3+4i|} = \sqrt[7]{5};\quad \theta = (\arc\tan\ 4/3)/7.$

2. (ii) $(x^2)^2 + x^2 + 1 = 0$, con lo que

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ o } \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \text{ o } \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Así pues, x es una de las raíces cuadradas de estos números, o sea que x es uno de los números

$$\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

(iv) $x = \dfrac{7}{3} - \dfrac{4i}{3}$,

$y = \dfrac{1}{3} + 2i.$

3. (ii) Todos los z con $|z| = 1$.

(iv) La elipse constituida por todos aquellos puntos cuya suma de distancias a a y a b es c, si $c > |a - b|$; el segmento rectilíneo comprendido entre a y b si es $|a - b| = c$; ϕ si es $|a - b| > c$.

6. z y $\sqrt{i} \cdot \overline{z \sqrt{-i}}$ son simétricos uno de otro respecto a la diagonal, ya que la diagonal se transforma en el eje real al multiplicar por $\sqrt{-i}$, con lo que $\sqrt{i} \cdot \overline{z \sqrt{-i}}$ se obtiene girando el plano hasta llevar la diagonal sobre el eje real, reflejándolo después respecto al eje real y finalmente volviéndolo a girar en sentido contrario el mismo ángulo que antes.

7. (a) Al ser reales $a_0, \ldots, a_{n-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{(a + bi)^n + a_{n-1}(a + bi)^{n-1} + \ldots + a_0} \\ &= (\overline{a + bi})^n + a_{n-1}(\overline{a + bi})^{n-1} + \ldots + a_0. \end{aligned}$$

(b) Puesto que $a + bi$ y $a - bi$ son raíces, $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ es divisible por $z - (a + bi)$, por $z - (a - bi)$ y por su producto

$$[z - (a + bi)] \cdot [z - (a - bi)] = z^2 - 2az + (a^2 + b^2).$$

8. (a) Supóngase que $a + b\sqrt{c} = a' + b'\sqrt{c}$. Si $b = b'$, entonces es también $a = a'$. Si $b \neq b'$ tendríamos entonces $\sqrt{c} = (a - a')/(b - b')$, en contradicción con el hecho de ser $\sqrt{c}$ irracional (problema 2-16).

(b) Las demostraciones son casi exactamente las mismas que las de las partes (1) — (6) del teorema 1.

(c) Al ser $a_0, \ldots, a_{n-1}$ enteros, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{(a + b\sqrt{c})^n + a_{n-1}(a + b\sqrt{c})^{n-1} + \ldots + a_0} \\ &= (\overline{a + b\sqrt{c}})^n + a_{n-1}(\overline{a + b\sqrt{c}})^{n-1} + \ldots + a_0. \end{aligned}$$

10. (a) Si $\omega^n = 1$, entonces $(\omega^k)^n = \omega^{nk} = (\omega^n)^k = 1$.

(b) Existen dos raíces cúbicas primitivas y 4 raíces 5[as] primitivas (en los dos casos todas las raíces excepto una); existen 2 raíces primitivas de orden 4, (i y $-i$) y 6 de orden 9 (si ω es la raíz de argumento más pequeño, entonces no son primitivas 1, ω^3 y ω^6).[De un modo general, el número de raíces primitivas n-ésimas es el número de números desde 1 hasta $n-1$ que no tienen con n ningún factor común.]

(c) Por el problema 2-4

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

11. (a) La verdad del aserto está clara si la recta es el eje real, pues en tal caso las partes imaginarias de $z_1, \dots, z_k$ son, o bien todas positivas o bien todas negativas, con lo que la suma de las mismas será positiva en un caso y negativa en otro. En general, sea θ el ángulo entre la recta y el eje real y pongamos $w = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Entonces $z_1w^{-1}, \dots, z_kw^{-1}$ están todos a un mismo lado del eje real, con lo que $z_1w^{-1} + \dots + z_kw^{-1} = (z_1 + \dots + z_k)w^{-1} \neq 0$, de donde $z_1 + \dots + z_k \neq 0$.

(b) z^{-1} queda por encima del eje real si y sólo si z queda por debajo del mismo y viceversa. Esto demuestra el aserto cuando la recta es el eje real. El caso general se deduce después lo mismo que en la parte (a).

12. Las hipótesis siguen cumpliéndose si se multiplica cada z_j por un mismo w. Podemos suponer, pues, que z_1 es real y aun incluso que $z_1 = 1$. Si es así, $z_2 + z_3$ será entonces real, con lo que $z_2 = a + b_i$, $z_3 = a - b_i$. Tendrá que ser, además, $2a + 1 = 0$, o sea $a = -1/2$; al ser $a^2 + b^2 = 1$, tenemos $b = \sqrt{3}/2$. Los puntos 1, $-1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $-1/2 - i\sqrt{3}/2$ sabemos que son vértices de un triángulo equilátero.

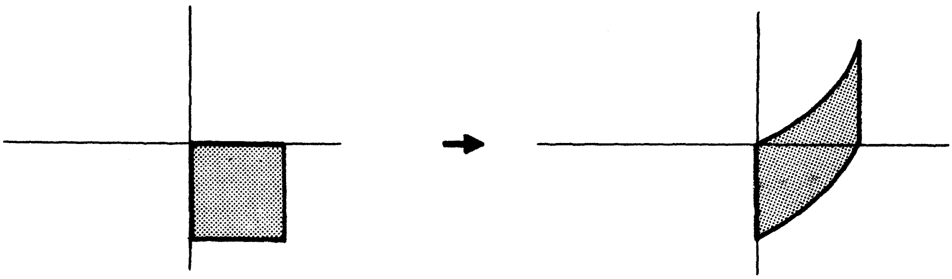
CAPíTULO 25

1. (a) Si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|\alpha(x) - \alpha(x_0)| < \delta$. Análogamente, si $|y - y_0| < \delta$, entonces $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \delta$.

   (b) $g = f \circ \alpha$; $h = f \circ \beta$.

2. (a) g es una función continua de valores reales definida en $[0, 1]$ con $g(0) = f(z)$ y $g(1) = f(w)$. Así pues, g toma en $[0, 1]$ todos los valores comprendidos entre $f(z)$ y $f(w)$.

   (b) Pongamos $f(x + iy) = x + i(y + x^2)$, en $[0, 1] \times [-1, 0]$.



3. (a) Por el teorema fundamental del álgebra, existe un número z_1 tal que $z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1} + \dots + a_0 = 0$. Entonces

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = (z - z_1)(z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0)$$

para ciertos números $b_0, \dots, b_{n-2}$ (lo mismo que en el problema 3-7). Utilizando un razonamiento inductivo podemos suponer que

$$z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0 = \prod_{i=2}^{n} (z - z_i)$$

para ciertos números $z_2, \dots, z_n$.

   (b) Según el problema 24-7, los números no reales $z_1, \dots, z_n$ de la parte

(a) se presentan en pares de números conjugados uno de otro, y $(z - z_i)(z - \overline{z_i})$ tiene coeficientes reales.

4. (a) Es evidente.

(b) Si $f = \sum_{i=1}^{n} h_i^2$ y $g = \sum_{j=1}^{m} k_j^2$, entonces $fg = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (h_i k_j)^2$.

(c) Si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x - a) f_1(x)$ para cierta función polinómica f_1. Tendrá que ser ahora $f_1(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$, y $f_1(x) \leqslant 0$ para $x \leqslant a$. Así pues, toda raíz de f es una raíz doble, con lo que $f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^2 g(x)$ donde $g(x) > 0$ para todo x. Al no tener g raíces, el problema 3 nos dice que g es un producto de factores cuadráticos $x^2 + ax + b$ sin raíces. Así pues, $a^2 - 4b < 0$, con lo que podemos poner

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{b - a^2/4})^2\,,$$

que es una suma de cuadrados. Resulta así que f es un producto de sumas de cuadrados y por lo tanto una suma de cuadrados.

5. (a) Sígase el procedimiento indicado en la ayuda para obtener una sucesión decreciente de rectángulos $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, cada uno de los cuales contiene infinitos puntos de A. Según el teorema de los intervalos encajados (problema 8-14), existe un punto x en todos los $[a_i, b_i]$ y un punto y en todos los $[c_i, d_i]$. Entonces $z = (x, y) = x + iy$ está en todos los $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$. Si es $\epsilon > 0$, entonces para un cierto i el conjunto $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ está contenido en $\{a\colon |z - a| < \epsilon\}$, con lo que existen en $\{a\colon |z - a| < \epsilon\}$ infinitos puntos de A.

(b) Si f no estuviese acotada en $[a, b] \times [c, d]$ existirían entonces puntos a_n en $[a, b] \times [c, d]$ con $|f(a_n)| \geqslant N$. Si z es un punto límite de $\{a_n\colon n \text{ está en } N\}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existen puntos a_n con $|a_n - z| < \epsilon$, con lo que $f(a_n) \geqslant N$. Esto contradice al hecho de ser f continua en z.

(c) Sea $\alpha = \sup\,\{f(z)\colon z \text{ está en } [a, b] \times [c, d]\}$; según la parte (b) este supremo existe. Si fuese $\alpha \neq f(z)$ para todos los z de $[a, b] \times [c, d]$, entonces $g(z) = 1/(f(z) - \alpha)$ sería una función continua no acotada en $[a, b] \times [c, d]$.

6. (a) Si $c = \alpha + \beta i$, entonces $z = a + bi$ satisface $z^2 = c$ si y sólo si

$$a^2 - b^2 = \alpha,$$
$$2ab = \beta,$$

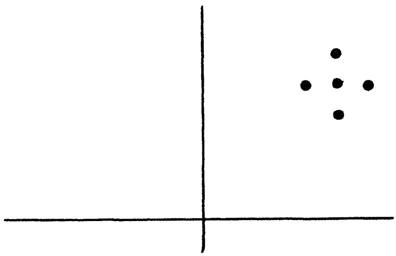
que puede resolverse dando

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ b &= \frac{\beta}{2\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \end{aligned}\right\} \quad \text{o} \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \beta &= \frac{-\beta}{2\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}. \end{aligned}\right.$$

(b) Si $n = 2k$, entonces toda solución de $z^k - \sqrt{c} = 0$ será solución de $z^{2n} - c = 0$. (Si k es par, podemos continuar hasta llegar a un número impar.)

(c) Para este f tenemos
$g(z) = f(z + z_0) = (z + z_0)^n - c = (z_0{}^n - c) + (nz_0)z + \ldots$.

(d) Supongamos, por ejemplo, que $-c = \alpha + \beta i$ con $\alpha, \beta > 0$. Si $\delta^n < \alpha$, entonces $|-c-\delta^n| < |-c|$. El mismo tipo de razonamiento es aplicable para todos los demás casos.



7. (a)

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha (z-z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_\alpha)^{m_\alpha - 1} \cdot \ldots \cdot (z-z_k)^{m_k} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha (z-z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_\alpha)^{m_\alpha} \cdot \ldots \cdot (z-z_k)^{m_k} (z-z_\alpha)^{-1} \\ &= (z-z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_k)^{m_k} \cdot \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha (z-z_\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Si $z_1, \ldots, z_k$ cayeran todos al mismo lado de una recta pasando por z, entonces $z - z_1, \ldots, z - z_k$ caerían todos al mismo lado de una recta pasando por 0. Lo mismo ocurriría entonces con $m_1{}^{-1}(z - z_1), \ldots, m_k{}^{-1}(z - z_k)$, ya que $m_1, \ldots, m_k > 0$. Por el problema 24-11, esto implicaría que $g(z) \neq 0$, lo cual es una contradicción.

(c) Si z satisfaciera $f'(z) = 0$, pero no estuviera en la envoltura convexa del conjunto $\{z_1, \ldots, z_k\}$, existiría entonces una recta por z que contendría los puntos $z_1, \ldots, z_k$. Esto contradice la parte (b).

8. La demostración es exactamente la misma que para las funciones reales definidas en **R**.

9. (a) Sea $z_0 = x_0 + iy_0$. Al ser

$$\alpha + i\beta = f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z},$$

debe cumplirse, en particular, que para un δ real tengamos

$$\alpha + i\beta = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0 + \delta) - f(z_0)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta} + i \frac{h(x_0 + \delta) - h(x_0)}{\delta} \right]$$

$$= g'(x_0) + ih'(x_0),$$

con lo que $\alpha = g'(x_0)$ y $\beta = h'(x_0)$.

(b) Tenemos también

$$\alpha + i\beta = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0 + \delta i) - f(z_0)}{\delta i} = \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{k(y_0 + \delta) - k(y_0)}{\delta i} + i \frac{\ell(y_0 + \delta) - \ell(y_0)}{\delta i} \right]$$

$$= \frac{k'(y_0)}{i} + \ell'(y_0),$$

con lo que $\ell'(y_0) = \alpha$ y $k'(y_0) = -\beta$.

(c) La parte (b) hace ver que u y v son constantes a lo largo de rectas horizontales y verticales.

10. (a)

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{(-1)^k k!}{(x-i)^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x+i)^{k+1}} \right).$$

(b)

$$\begin{aligned} \arctan^{(k)}(0) &= f^{(k-1)}(0) \\ &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(-i)^k} - \frac{1}{i^k} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2i}\, i^k \,[1 + (-1)^{k-1}]. \end{aligned}$$

[Si k es par, entonces $\arctan^{(k)}(0) = 0$. Si $k = 2\ell + 1$, entonces $\arctan^{(2\ell+1)}(0) = (2\ell)!\,(-1)^\ell$.]

CAPÍTULO 26

1. (ii) Absolutamente convergente.

   (iv) Absolutamente convergente, ya que $|1/2 + i/2| = \sqrt{2}/2 < 1$.

2. (ii) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)}{|z|^n/n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|$$

   es < 1 para $|z| < 1$ y > 1 para $|z| > 1$.

   (iv) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}(n+1+2^{-n-1})}{|z|^n(n+2^{-n})} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+2^{-n-1}}{n+2^{-n}} = |z|$$

   es < 1 para $|z| < 1$ y > 1 para $|z| > 1$.

3. (ii) Al ser

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}\,|z|}{\sqrt[n]{n^n}} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{|z|}{e} \qquad \text{(por el problema 21-10),}$$

   el radio de convergencia es e.

   (iv) Al ser

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}\,|z|}{\sqrt[n]{2^n}} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{|z|}{2} \qquad \text{(por el problema 21-1),}$$

   el radio de convergencia es 2.

4. (a) Al ser $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_nz^n|}$, el problema 22-7 hace ver que $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ converge (absolutamente).

(b) Si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_nz^n|} = 1 + \epsilon$ para $\epsilon > 0$, existen entonces infinitos n con $\sqrt[n]{|a_nz^n|} \geqslant 1 + \epsilon/2$, con lo que $|a_nz^n| \geqslant (1 + \epsilon/2)^n$ para infinitos n, lo que significa que los términos a_nz^n son no acotados.

(c) Puesto que los términos $\sqrt[n]{|a_n|}$ son no acotados, lo mismo puede decirse de $\sqrt[n]{|a_nz^n|}$ para $z \neq 0$. Con mayor razón se cumple esto para $|a_nz^n|$, con lo que $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ diverge.

5. Si z está sobre el círculo unidad, entonces $|z^n/n^2| \leqslant 1/n^2$, con lo que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|/n^2$ converge por el criterio de comparación.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ diverge ciertamente para $z = 1$. Si $z \neq 1$, entonces por el problema 2-4

$$\sum_{n=1}^{N} z^n = z \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z}.$$

Si existiera $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z^n$, entonces existiría $\lim_{N\to\infty} z^N$, lo cual es imposible, ya que $\ell = \lim_{N\to\infty} z^N$ implicaría que $z\ell = \lim_{N\to\infty} z^{N+1} = \ell$, o $z = 1$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ diverge para $z = 1$ y converge para $z = -1$.

6. (a) Está claro que $e^0 = 1$. Ahora la función $g(z) = e^ze^{-z}$ satisface $g'(z) = e^ze^{-z} - e^ze^{-z} = 0$ y $g(0) = 1$, con lo que $e^ze^{-z} = 1$ para todo z (problema 25-9). En particular, $e^z \neq 0$ para todo z. Pongamos ahora $g(w) = e^{z+w}/e^w$. Entonces

$$g'(w) = \frac{e^we^{z+w} - e^{z+w}e^w}{e^{2w}} = 0,$$

y $g(0) = e^z$, con lo que $g(w) = e^z$ para todo w, y por lo tanto $e^{z+w} = e^ze^w$ para todo w.

(b)

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w =$$

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right)$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z + w).$$

$$\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w =$$

$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right)$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z + w).$$

7. (a) Al ser $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, el problema no es sino el mismo problema 15-21.

(b)

$$|e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \operatorname{sen} y| = |e^x|.$$

8. (a) Si $z \neq 0$, entonces $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ para un $r > 0$. Entonces $\exp(\log r + i\theta) = z$.

(b) Tenemos $\operatorname{sen} z = w$ cuando

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w,$$

$$(e^{iz})^2 - 2iwe^{iz} - 1 = 0,$$

$$e^{iz} = \frac{2iw \pm \sqrt{-4w + 4}}{2}$$

$$= iw \pm \sqrt{1 - w}.$$

Esta ecuación tiene siempre solución en z, según la parte (a), ya que $iw \pm \sqrt{1 - w} \neq 0$.

9. (a) Si es $g(x) = u(x)$ y $h(x) = v(x)$ para x reales, entonces el problema 25-9 hace ver que $f'(x) = g'(x) + ih'(x)$. Así pues, si ponemos $f' = u_1 + iv_1$ siendo u_1 y v_1 de valores reales y definimos $g_1(x) = u_1(x)$ y $h_1(x) = v_1(x)$ para x reales, entonces $g_1 = g'$ y $h_1 = h'$, con lo que otra aplicación del problema 25-9 hace ver que $f''(x) = g''(x) + ih''(x)$

para x reales. Procediendo inductivamente, tenemos $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) + ih^{(k)}(x)$ para todos los k. Al separar las partes real e imaginaria de

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 f(x) = 0 \qquad \text{para } x \text{ reales}$$

se ve que g y h satisfacen (*).

(b) Si $a = b + ci$ es una raíz de $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, entonces, lo mismo que en el problema 17-31, la función $f(z) = e^{az} = e^{bz}\cos cz + ie^{bz}$ sen cz satisface (*). Así pues, según la parte (a), las funciones $g(x) = e^{bx}\cos cx$ y $h(x) = e^{bx}$ sen cx satisfacen (*).

10. (a), (b) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \text{ sen } y) = w$ significa que $e^x = |w|$, con lo que $x = \log |w|$, e y es un argumento de w. En particular $e^{x+iy_0} = e^{x+iy_1}$ e y_0 e y_1 son argumentos de w (por ejemplo, $e^0 = e^{2\pi i}$), con lo que la exponencial no es uno-uno.

(c) Supóngase que existiera una función continua logaritmo definida para $|z| = 1$ y tal que $\exp(\log(z)) = z$ para todo z con $|z| = 1$. Entonces podríamos poner $\log(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ para funciones continuas α y β, de valores reales. Tendría que ser $\alpha(z) = 0$ para $|z| = 1$ y $\beta(z)$ un argumento de z para $|z| = 1$. Esto contradice el hecho de que no hay ninguna función argumento que sea continua.

(d) Todos los números de la forma $i(2k\pi + \pi/2)$.

(e) Todos los números de la forma $e^{-(2k\pi+\pi/2)}$.

(f) 1^i tiene los valores $e^{i(2k\pi i)} = e^{-2k\pi}$. Los logaritmos de estos números (reales) tienen los valores $-2k\pi + 2\ell\pi i$. Así pues, $(1^i)^i$ tiene los valores

$$e^{i(-2k\pi+2\ell\pi i)} = e^{-2\ell\pi}.$$

Pero 1^{-1} tiene solamente los valores $e^{-(2k\pi i)} = 1$.

11. (a) $|x + i| = 1 + x^2$, y un argumento para $x + i$ es arc tan $1/x = \pi/2 - \text{arc tan } x$, mientras que un argumento para $x - i$ es arc tan$(-1/x) = -\text{arc tan } 1/x = -(\pi/2 - \text{arc tan } x)$.

(b) A partir de la parte (a) obtenemos

$$\frac{1}{2i}[\log(x-i) - \log(x+i)] = \frac{1}{2i}\cdot\left(-2i\right)\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tan } x\right)$$

$$= \text{arc tan } x - \pi/2,$$

que difiere en una constante de la solución corriente, arc tan x.

12. (a) Puesto que $a_n - a_m = (b_n - b_m) + i(c_n - c_m)$, tenemos $|b_n - b_m| \leqslant |a_n - a_m|$ y $|c_n - c_m| \leqslant |a_n - a_m|$, con lo que $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son

sucesiones de Cauchy si $\{a_n\}$ lo es. Puesto que también tenemos $|a_n - a_m| \leqslant |b_n - b_m| + |c_n - c_m|$, se sigue que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ lo son.

(b) Si $\{a_n\}$ es de Cauchy, entonces $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ lo son, con lo que $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ convergen hacia α y β respectivamente. Así pues, $\{a_n\}$ converge hacia $\alpha + i\beta$, según el teorema 1.

(c) La indicación que se da es la solución. Puesto que las sucesiones de Cauchy de números complejos son lo mismo que las sucesiones convergentes de números complejos, existe un criterio de convergencia de Cauchy para series complejas: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\lim_{m,n\to\infty} |a_{n+1} + \ldots + a_m| = 0$. Escríbanse ahora las demostraciones de las primeras mitades de cada uno de los teoremas 22-4 y 22-7, interpretando todos los números como números complejos.

13.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \cos\theta + \ldots + \cos n\theta &= \frac{1}{2}(e^{-in\theta} + \ldots + 1 + \ldots + e^{in\theta}) \\
&= \frac{e^{-in\theta}}{2} \cdot (1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{2ni\theta}) \\
&= \frac{e^{-in\theta}}{2} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{-in\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{2(1 - e^{i\theta})} \\
&= \frac{e^{-i(n+1/2)\theta} - e^{i(n+1/2)\theta}}{2(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\theta}{2\operatorname{sen}\theta/2}.
\end{aligned}$$

14. (a)

$$r_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

(b) Si existe $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, entonces

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{r_n} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} r_n} = 1 + \frac{1}{r},$$

con lo que $r = (1 + \sqrt{5})/2$ (claramente $r > 0$). Para ver que el límite efectivamente existe, obsérvese que si $r_n < (1 + \sqrt{5})/2$, entonces $r_n^2 - r_n - 1 < 0$, con lo que

$$r_n < \frac{2r_n + 1}{r_n + 1} = r_{n+2}.$$

Así pues, $r_1 < r_3 < r_5 < \ldots < 2$, y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n+1}$ existe. De manera análoga se ve que $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n}$ existe. Además, la ecuación $r_{n+2} = (2r_n + 1)/(r_n + 1)$ lleva, lo mismo que antes, al hecho de que los dos límites son $(1 + \sqrt{5})/2$.

(c) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|z| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}|z|$$

es < 1 para $|z| < 2/(1 + \sqrt{5})$ y > 1 para $|z| > 2/(1 + \sqrt{5})$.

15. (a)

$$-\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\left(-1 + \frac{e^z+1}{e^z-1}\right)$$

$$= \frac{z}{2}\left(\frac{-(e^z-1) + e^z + 1}{e^z - 1}\right)$$

$$= \frac{z}{e^z-1};$$

$$\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1} = \frac{(e^{-z}+1)e^z}{(e^{-z}-1)e^z} = \frac{1+e^z}{1-e^z} = -\frac{e^z+1}{e^z-1}.$$

Estas fórmulas prueban que $z/(e^z - 1) = -z/2 + h(z)$, donde h es par. En consecuencia, la serie de potencias de h contiene solamente potencias pares de z. Así $-1/2 = b_1$ es el coeficiente de z en la serie de potencias de $z/(e^z - 1)$, y $b_n = 0$ para n impar y mayor que 1.

(b) Si $n > 1$, entonces el coeficiente de z^n tiene que ser 0. Pero este coeficiente es $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} b_i$.

(c)

$$z \cot z = z\,\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = z\cdot\frac{(e^{iz} + e^{-iz})/2}{(e^{iz} - e^{-iz})/2i}$$

$$= \frac{-2iz}{2} \cdot \frac{e^{2iz/2} + e^{-2iz/2}}{e^{2iz/2} - e^{-2iz/2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (2iz)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 2^{2n} z^{2n}.$$

(d) Partiendo de la fórmula $\tan 2z = 2 \tan z/(1 - \tan^2 z)$ (problema 15-8) tenemos

$$\cot z - 2 \cot 2z = \frac{1}{\tan z} - \frac{1 - \tan^2 z}{\tan z} = \frac{\tan^2 z}{\tan z} = \tan z.$$

(e)

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 2^{2n} z^{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 2^{2n} z^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n} - 1) z^{2n-1}.$$

16. (a) Aplicando (*) a $f^{(k)}$ obtenemos

$$f^{(k)}(x + 1) - f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(x)}{n!}.$$

Así pues,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(x + 1) - f^{(k)}(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \frac{f^{(k+n)}(x)}{n!}.$$

El coeficiente de $f^{(1)}(x)$ es $b_0/0!\,1! = 1$. El coeficiente de $f^{(j)}(x)$ para $j > 1$ es

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{b_k}{k!(j-k)!} = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} b_k = 0, \qquad \text{por el problema 15(b).}$$

(b)

$$f'(0) + \dots + f'(n) = \sum_{x=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(x + 1) - f^{(k)}(x)] \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \sum_{x=0}^{n} [f^{(k)}(x + 1) - f^{(k)}(x)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(n+1) - f^{(k)}(0)].$$

(c) Sea f una función polinómica con $f' = g$. Entonces $f(n+1) - f(0) = \int_0^{n+1} g$. Al ser $b_0 = 1$, la parte (b) se convierte en

$$g(0) + \ldots + g(n) = \int_0^{n+1} g(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [g^{(k-1)}(n+1) - g^{(k-1)}(0)].$$

(d) $g^{(k)}(x) = p!\, x^{p-k} / (p-k)!$ para $k \leqslant p$, con lo que la parte (c), aplicada con $n-1$ en vez de con n, proporciona

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \int_0^{n+1} x^p\,dx + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{b_k}{k!} \frac{p!}{(p-k+1)!} n^{p-k+1}$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Así pues,

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p + b_1 n^p + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

17. (a) Está claro que $\phi_n(0) = b_n$. Si $n > 1$, entonces

$$\phi_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k, \qquad \text{ya que } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k + b_n = b_n, \qquad \text{por el problema 15(b).}$$

$$\phi_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} b_{n-k} x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n}{k+1} b_{n-1+k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} b_{n-1+k} x^k$$

$$= n\phi_{n-1}(x).$$

Para demostrar la última ecuación, obsérvese primero que

$$\phi_2(1-x) = (1-x)^2-(1-x)+\frac{1}{6} = x^2-2x+1-1+x+\frac{1}{6}$$
$$= x^2-x+\frac{1}{6} = \phi_2(x).$$

Supóngase ahora que $\phi_n(x) = (-1)^n\phi_n(1-x)$ para algún $n > 1$. Entonces la función $g(x) = \phi_{n+1}(1-x)$ satisface

$$g'(x) = -\phi_{n+1}'(1-x) = -(n+1)\,\phi_n(1-x)$$
$$= (-1)^{n+1}(n+1)\,\phi_n(x) = (-1)^{n+1}\phi_n'(x).$$

Además, $g(0) = \phi_{n+1}(1) = b_{n+1} = \phi_{n+1}(0)$, con lo que $g(x) = (-1)^{n+1}\phi_{n+1}(x)$ para todo x.

(b) Sustituyendo de (*) tenemos

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\,[f^{(k)}(x+1)-f^{(k)}(x)]$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} \sum_{n=1}^{N-k} \frac{f^{(k+n)}(x)}{n!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\, R_{N-k}{}^{k}(x).$$

El coeficiente de $f'(x)$ en la doble suma es $b_0/0!\,0! = 1$. Para $1 < j \leqslant N$, el coeficiente de $f^{(j)}(x)$ es

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{b_k}{k!\,(j-k)!} = 0 \qquad \text{por el problema 15(b).}$$

(c) El término $R_{N-k}{}^{k}(x)$ es el resto $R_{N-k,x}(x+1)$ para la función $f^{(k)}$. Así

$$R_{N-k}{}^{k}(x) = \int_x^{x+1} \frac{f^{(k+N-k+1)}(t)}{(N-k)!}\,(x+1-t)^n\,dt.$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^{k}(x) = \int_x^{x+1} \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!\,(N-k)!}(x+1-t)^n f^{(N+1)}(t)\,dt$$
$$= \int_x^{x+1} \frac{\phi_N(x+1-t)}{N!}\, f^{(N+1)}(t)\,dt.$$

(d) De las partes (b) y (c) obtenemos

$$f'(x) + \ldots + f'(x+n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\,[f^{(k)}(x+n+1)-f^{(k)}(x)]$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\int_{x+j}^{x+j+1}\frac{\phi_N(x+j+1-t)}{N!}f^{(N+1)}(t)\,dt.$$

Aplicando esto a $g=f'$ obtenemos la fórmula deseada.

(e) Si t está en $[x+j, x+j+1]$, entonces $x-t$ está en $[-j-1, -j]$. Por lo tanto, por definición, $\psi_N(x-t)=\phi_N(x+j+1-t)$.

18. (a) Aplíquese el problema 17(d) a $g=\log$ y $x=1$, con $n-2$ en el lugar de n. Al ser $g^2(x)=-1/x^2$ obtenemos

$$\log(n-1)! = \log 1 + \ldots + \log(n-1)$$

$$= \int_1^n \log t\,dt + \frac{b_1}{1!}[\log n - \log 1] + (-1)^3\int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2!}\cdot -\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \int_1^n \log t\,dt - \frac{1}{2}\log n + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt$$

$$= n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(b) En consecuencia

$$\log n! = \log(n-1)! + \log n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + 1 + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

Así pues,

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right) = 1 + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(c) Al ser ψ_2 periódica, es acotada. Así pues, $\int_1^\infty \psi_2(t)/2t^2\,dt$ existe, puesto que existe $\int_1^\infty 1/t^2\,dt$. Pongamos $\beta = 1 + \int_1^\infty \psi_2(t)/2t^2\,dt$. Entonces

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right) = \beta - \int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt$$

$$= \log\alpha - \int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt,$$

con lo que

$$\log\left(\frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n}}\right) = -\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(d) La parte (c) implica que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\, dt = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n}}\right),$$

con lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n}} = 1.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{\alpha^2 n^{2n+1}e^{-2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{\alpha(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}} = 1,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2 n^{2n+1}e^{-2n}2^{2n}}{\alpha(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\sqrt{n}}.\\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n+1/2}\sqrt{n}\,2^{2n}}{2^{2n}\sqrt{2}\,n^{2n+1/2}\sqrt{n}}\\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(e) $\phi_2(0) = \phi_2(1) = b_2 = 1/6$. Si $0 = \phi_2'(x) = 2x - 1$, entonces $x = 1/2$, y $\phi_2(1/2) = 1/12$. Así pues, $1/12 \leqslant |\phi_2(x)| \leqslant 1/6$ cuando x está en $[0, 1]$. Por la parte (c) tenemos

$$-\frac{1}{12n} \leqslant \log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}}\right) \leqslant \frac{1}{12n},$$

lo cual proporciona el resultado deseado.

CAPÍTULO 27

1. Está claro que $a + b = b + a$, ya que la tabla de $+$ es simétrica. Está a la vista que $a + 0 = a$ para todo a, y la condición 2(ii) se satisface, puesto que cada fila de la tabla contiene al 0. Para comprobar que $(a + b) + c = a + (b + c)$ basta considerar solamente los casos en que a, b y c son distintos de 0. La ecuación se cumple ciertamente cuando es $a = c$ por ser $x + y = y + x$. Con esto quedan sólo los casos

$$(1 + b) + 2 = 1 + (b + 2),$$
$$(2 + b) + 1 = 2 + (b + 1),$$

mutuamente equivalentes, cualquiera de los cuales puede demostrarse dando a b los valores 1 y 2. Las condiciones (4) — (6) se comprueban de manera análoga. Finalmente, (7) está claro si a es 0 o es 1. Para $a = 2$ podemos suponer $b, c \neq 0$ y la condición claramente se cumple si $b = c = 1$. Con esto quedan solamente tres casos, el $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$, el $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, y el $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, de los cuales los dos últimos son equivalentes.

   F no puede convertirse en cuerpo ordenado, puesto que $1 = 1^2$ tendría que ser positivo, siendo así que $1 + 1 + 1 = 0$.

2. F no será un cuerpo, puesto que tendremos $2 \cdot 2 = 0$.

3. Lo mismo que en el problema 1, las condiciones (2), (3), (5) y (6) se cumplen claramente. La condición (1) puede comprobarse caso por caso. Para comprobar (5) podemos suponer que a, b y c son distintos de 0 y de 1. Con esto quedan solamente los casos $(\alpha \cdot \beta) \cdot \alpha = \alpha \cdot (\beta \cdot \alpha)$ y $(\alpha \cdot \beta) \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot \beta)$.

4. (a) $a + a = a \cdot (1 + 1) = a \cdot 0 = 0.$
   (b) $0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(a + a) = 1 + 1.$

5. (a) El aserto resulta evidente cuando $n = 1$. Supóngase que se cumple para n. Entonces

$$\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{(n+1) \text{ veces}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}} \cdot (\underbrace{[1 + \dots + 1]}_{n \text{ veces}} + 1)$$

$$= \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ veces}} + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{mn \text{ veces}} + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{\substack{mn+m=m(n+1) \\ \text{veces}}}.$$

(b) Si m no fuese primo, o sea que $m = k\ell$ para ciertos $k,\ell < m$, entonces

$$0 = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m = k\ell \text{ veces}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{k \text{ veces}} \cdot \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{\ell \text{ veces}} = a \cdot b.$$

Por lo tanto, o bien es $a = 0$, o bien $b = 0$, en contradicción con lo supuesto acerca de m.

6. (a) Si esto no se cumpliera, entonces F tendría infinitos elementos distintos, a saber, todos los de la forma

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}}$$

para todos los n.

(b) Supóngase $m > n$. Entonces

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{m-n \text{ veces}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}} - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ veces}} = 0.$$

7. Las soluciones son

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc},$$

$$y = \frac{\alpha c - \beta a}{bc - ad}.$$

8. (a) Una sólo, que es 0.

(b) Por supuesto, a podría no tener ninguna raíz cuadrada (por ejemplo, si $F = \mathbf{R}$ y $a = -1$). Pero si a tiene una raíz cuadrada b, entonces tiene una raíz cuadrada $-b$; además, si $c^2 = a = b^2$, entonces $(c-b)(c+b) = 0$, con lo que $c = b$ o $c = -b$. En consecuencia b y $-b$ son las únicas raíces cuadradas; éstas son distintas precisamente cuando $1 + 1 \neq 0$.

9. (a) Se trata de una comprobación directa.

   (b) En la parte (a), el símbolo 2 significa $1 + 1$, lo cual es 0 en F_2; la solución de la parte (a) es correcta solamente cuando $1 + 1 \neq 0$.

10. (a) Casi todas las condiciones se pueden comprobar directamente. Para verificar 5(ii), obsérvese que si $(x, y) \neq 0$, con lo que $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces $x^2 - ay^2 \neq 0$, ya que a carece de raíces cuadradas. Entonces

$$(x, y) \odot \left(\frac{x}{x^2 - ay^2}, \frac{-y}{x^2 - ay^2}\right) = (1, 0).$$

   (b) Se comprueba directamente.

   (c) (0, 1) es una raíz cuadrada de a.

11. (a) El inverso de (a_1, a_2, a_3, a_4) es

$$\left(\frac{a_1}{\gamma}, -\frac{a_2}{\gamma}, -\frac{a_3}{\gamma}, -\frac{a_4}{\gamma}\right),$$

donde $\gamma = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$.

   (b) Cada valor de la tabla es el producto $a \cdot b$, donde a es el elemento que encabeza la fila y b el que encabeza la columna.

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

[Si denotamos 1, i, j, k por v_1, v_2, v_3, v_4, entonces la definición de multiplicación puede ponerse en la forma

$$\left(\sum_{i=1}^{4} a_i v_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{4} b_j v_j\right) = \sum_{i\,j=1}^{4} a_i b_j (v_i v_j).$$

Esto permite una demostración más sencilla de que la multiplicación es asociativa, comprobando primero que es asociativa para ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$.]

CAPÍTULO 29

1. (a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, con lo que $f(0) = 0$. Al ser f un isomorfismo y $0 \neq 1$, se sigue que $f(1) \neq 0$. En consecuencia, la ecuación $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$ implica que $f(1) = 1$.

   (b) $0 = f(0) = f(a + -a) = f(a) + f(-a)$, con lo que $f(-a) = -f(a)$. Análogamente, $1 = f(1) = f(a \cdot a^{-1}) = f(a) \cdot f(a^{-1})$, con lo que $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

2. Vamos a dar, a modo de ejemplo, una demostración para (a). Si $\alpha^2 + 1 = 0$ para algún α de F_1, entonces, por el problema 1, $0 = f(0) = f(\alpha^2 + 1) = f(\alpha \cdot \alpha) + f(1) = f(\alpha)^2 + 1$, con lo que $f(\alpha)$ es una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en F_2.

3. (1) Si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$, con lo que $g(f(x)) \neq g(f(y))$, y por lo tanto $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

   (2) Si z está en F_3, entonces $z = g(y)$ para cierto y de F_2, e $y = f(x)$ para cierto x de F_1. Entonces es $z = (g \circ f)(x)$.

   (3)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y))\\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y),\\ (g \circ f)(x \cdot y) &= g(f(x \cdot y)) = g(f(x) \cdot f(y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y))\\ &= (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

   (4) Si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$, con lo que $g(f(x)) < g(f(y))$, es decir, $(g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$.

4. $g^{-1} \circ f$ es un isomorfismo de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, con lo que $g^{-1} \circ f = I$, y por lo tanto $g = f$.

5. Pongamos $f(x + iy) = x - iy$. [Puesto que es $i^2 = -1$, debemos tener

$f(i)^2 = f(-1) = -1$, con lo que $f(i) = i$ o $-i$, lo cual sugiere la solución. Este isomorfismo particular es el único que es de todos conocido, aparte de la identidad, pero hay en realidad otros infinitos isomorfismos. Este es uno de los hechos para cuya comprensión se requiere, junto con ciertos conocimientos de álgebra, algunos de los elaborados teoremas de teoría de conjuntos que pueden encontrarse en las referencias [8] y [9] de las Lecturas Aconsejadas.]

y^2

Michael Spivak

Suplemento del

CALCULUS

EDITORIAL REVERTÉ S. A.
www.reverte.com

ESPAÑA
ISBN 84-291-5143-5
9 788429 151435

x^2